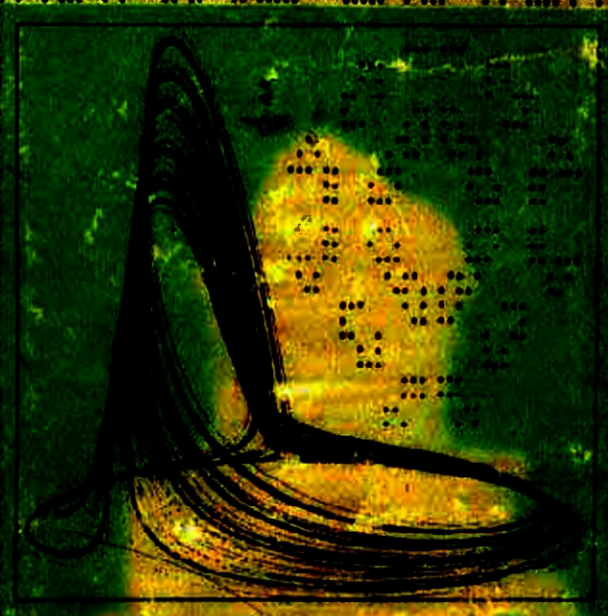


КОМПЬЮТЕРЫ И НЕЛИНЕЙНЫЕ ЯВЛЕНИЯ



АКАДЕМИЯ НАУК СССР

СЕРИЯ «КИБЕРНЕТИКА —
НЕОГРАНИЧЕННЫЕ ВОЗМОЖНОСТИ
И ВОЗМОЖНЫЕ ОГРАНИЧЕНИЯ»

Основана в 1963 г.

КОМПЬЮТЕРЫ И НЕЛИНЕЙНЫЕ ЯВЛЕНИЯ

**ИНФОРМАТИКА
И СОВРЕМЕННОЕ
ЕСТЕСТВОЗНАНИЕ**



МОСКВА · «НАУКА»

1988

ББК 32.81
К 63

Редакционная коллегия:

академик И. М. МАКАРОВ (председатель);

академик В. Г. АФАНАСЬЕВ,

доктор философских наук Б. В. БИРЮКОВ

академик С. В. ЕМЕЛЬЯНОВ,

академик Н. Н. МОИСЕЕВ,

академик Б. Н. НАУМОВ,

В. Д. ПЕКЕЛИС,

доктор технических наук Д. А. ПОСПЕЛОВ,

доктор технических наук И. С. УКОЛОВ,

доктор физико-математических наук В. В. ЩЕННИКОВ

Ответственный секретарь редколлегии

кандидат философских наук С. Н. ГОНШОРЕК

Редактор-составитель и автор предисловия академик

А. А. САМАРСКИЙ

Рецензенты:

член-корреспондент АН СССР С. И. ПОХОЖАЕВ,

доктор физико-математических наук А. М. ТЕР-КРИКОРОВ

Компьютеры и нелинейные явления: Информатика
К63 и современное естествознание / Авт. предисл. А. А. Самарский. — М.: Наука, 1988. — 192 с. ил. — (Серия «Кибернетика — неограниченные возможности и возможные ограничения»).

ISBN 5—02—006624—9

Переход к исследованию нелинейных явлений и применение вычислительной техники открывают принципиально новые возможности в познании законов природы. Самоорганизация, порядок и хаос, симметрия в природе, компьютерные игры, позволяющие по-новому взглянуть на физические законы, — таковы основные темы сборника.

Для широкого круга читателей, интересующихся методами информатики.

К 1502000000-285
054(02)-88 КБ—22—7—1988

ББК 32.81

Книги серии «Кибернетика — неограниченные возможности и возможные ограничения» удостоены дипломов I степени на Всесоюзных конкурсах общества «Знание» в 1985 и в 1987 гг.

ISBN 5—02—006624—9 © Издательство «Наука», 1988

ПРЕДИСЛОВИЕ

В последние десятилетия мы стали свидетелями коренных изменений в науке. Еще никогда научные достижения не оказывали такого воздействия на экономику, мировоззрение, на образ жизни. Наука стала одной из немногих областей, где экономический эффект в несколько раз превышает вложенные средства. Расходы на научные исследования в бюджетах развитых стран уже превышают десятки миллиардов долларов.

Однако развитие науки поставило много сложных проблем. За последние 15—20 лет в научных журналах было опубликовано столько же новых статей, сколько за всю предшествующую историю. Сейчас не только в науке, но и во многих отраслях техники «период полураспада знаний» (то время, за которое должна обновиться половина знаний, необходимых для успешной работы) не превышает 3—5 лет. В мире существует более 30 тысяч научных журналов. Происходит быстрый рост «информационного шума», повышается степень дублирования научных разработок. Следить за работами коллег и среди моря «лишней» информации выбрать нужную стало гораздо труднее.

На помощь приходит научно-популярная литература. У нее появились новые задачи и новый круг читателей. Это прежде всего сами ученые, преподаватели, студенты. Специализация часто оказывается настолько глубокой, что ученый не может следить за современными достижениями на уровне оригинальных публикаций даже в смежных областях и ждет помощи от научно-популярных книг, брошюр, статей. Причем эта аудитория оказалась очень многочисленной. Ведь только в нашей стране насчитывается более полутора миллионов научных работников.

Особенно важным представляется знакомство широкого круга читателей с научными достижениями, коренным образом меняющими технологию научных исследований. Многие из них связаны с использованием вычислительной техники, применением методов информатики, с вычислительным экспериментом.

ЭВМ, если ее эффективно использовать, позволяет в ходе научных исследований получать новые данные быстрее

и с более высоким качеством. Она способна активизировать процесс обучения, сделать более доступными многие математические достижения. Сегодня персональный компьютер дает возможность вести содержательные исследования, используя большой круг математических моделей физики, химии, биологии. Школьники и студенты на занятиях по информатике могут сейчас знакомиться с теми задачами, над которыми ученые работали не 2000, а 5—10 лет назад. Это должно заинтересовать молодежь наукой, показать возможности ЭВМ, повысить математическую культуру.

Компьютеры позволили не только проводить расчеты с огромной точностью и исследовать сложнейшие процессы. Они помогли по-новому взглянуть на многие физические и математические теории, привели к появлению новых идей и методов, к разработке междисциплинарных подходов, изменили облик современного естествознания. Ряд таких идей и подходов обсуждается в этой книге. Другие рассматриваются в сборнике «Компьютеры, модели, вычислительный эксперимент», который вышел в издательстве «Наука» в 1988 году. Оба сборника рассчитаны на широкий круг читателей. Часть материала в них может быть использована в преподавании информатики. Вместе с тем, некоторые обсуждаемые идеи будут интересны и специалистам, которые хотят познакомиться с вычислительным экспериментом, математическим моделированием и их ролью в познании законов природы.

Академик А. А. Самарский

СТРУКТУРЫ В НЕЛИНЕЙНЫХ СРЕДАХ

С. П. КУРДЮМОВ, Г. Г. МАЛИНЕЦКИЙ, А. Б. ПОТАПОВ,
А. А. САМАРСКИЙ

1. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Когда по жидкости распространяется сотрясение, то отдельные ее частицы, совершая взад и вперед весьма малые колебания, ускоряются и замедляются по закону маятника.

И. Ньютон. Математические начала натуральной философии

... математическая формулировка полученных физиком зачастую не слишком точных экспериментальных данных приводит в огромном числе случаев к удивительно точному описанию широкого класса явлений.

Э. Вигнер. Этюды о симметрии

Вопросы о движении, переходе постепенных количественных изменений в качественные, появлении у целого свойств, которыми не обладает ни одна из частей, волновали еще древних философов. Об этом напоминают их блестящие парадоксы, глубокие афоризмы, стройные и логичные теории. Предметом размышлений многих философских школ оказалось соотношение дискретного и непрерывного в природе. Непрерывное при этом связывали с плавными изменениями, с сохранением основных свойств объекта, дискретные — со скачками, с появлением новых качеств.

Вопрос этот оказался очень глубоким. Развитие естественных наук заставляло еще и еще раз возвращаться к нему.

Ученых XIX в. поразило наличие волновых свойств у света, который они представляли как поток дискретных частиц. К глубокому пересмотру фундаментальных понятий привело в XX в. создание квантовой механики. Оказалось, что дискретные и непрерывные свойства материи нельзя противопоставлять друг другу, что они неразрывно связаны между собой.

Выяснилось и другое важное обстоятельство. Анализ многих явлений требует сочетания дискретного и непрерывного подходов. И вопрос о соотношении тех или других свойств при построении теории оказывается далеко непростым. От его успешного решения часто зависит, не-

сколько глубоко нам удастся разобраться в изучаемом объекте.

Трудно представить, какие достижения современной науки, показались бы наиболее удивительными ученым прошлых веков. Но, наверное, они были бы очень удивлены тем, что много явлений удалось понять и описать с помощью математики. Сейчас мы воспринимаем, как само собой разумеющееся, что можно рассчитать полет космического корабля, движение самолета в самых разных режимах, процессы в плазме, где вещество нагрето до сотен миллионов градусов. Между тем еще в XVI в. ученые и не предполагали, что можно изучать законы движения жидкости или передачи тепла с помощью математики. «Непостижимая эффективность математики в естественных науках»¹ оказалась связана с построением содержательных математических моделей разных явлений.

Научное исследование предполагает выделение наиболее существенных черт в изучаемом явлении. Часто выделение таких черт позволяет перейти к более простому объекту, который правильно отражает основные закономерности явления и дает возможность получать о нем новую информацию. Такой объект и называется *моделью*.

Современные достижения науки и техники были бы невысказаны без эффективных математических моделей. Они являются важной частью общечеловеческой культуры, на которой построено все здание естественных наук.

В этой и следующей главах в качестве моделей принимаются различные уравнения, но далее мы познакомимся и с другими типами моделей.

Расскажем об одной простой задаче, при решении которой были развиты многие ключевые идеи. Рассмотрим струну, по которой ударили в начальный момент. Попробуем описать ее движение.

Ясно, что оно будет колебательным. Простой образ колебательного движения дает математический маятник или грузик на пружинке. Общим для них является то, что при отклонении от положения равновесия возникает возвращающая сила, пропорциональная отклонению $F = -kx$. Поскольку $F = ma = m d^2x/dt^2$, мы приходим к уравнению колебаний

$$d^2x/dt^2 + \omega^2 x = 0, \quad \omega^2 = k/m. \quad (1.1)$$

Его решения хорошо известны $x = A \sin \omega t + B \cos \omega t$. Постоянные A и B определяются положением

¹ Э. Вигнер. «Этюды о симметрии».

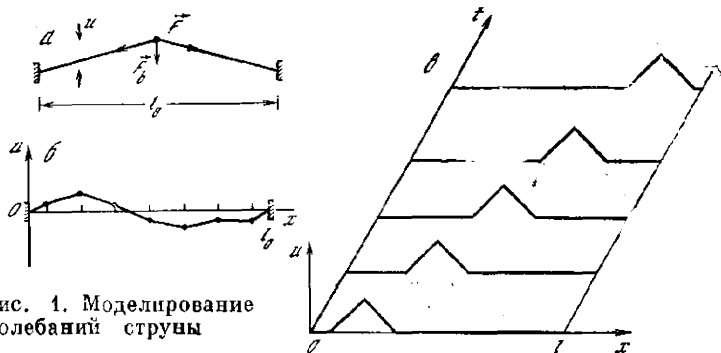


Рис. 1. Моделирование колебаний струны

и скоростью в начальный момент. Можно показать, что аналогичным уравнением описывается и движение другой системы — грузика массой m , к которому прикреплены две невесомые нити (или пружинки) одинаковой длины, натянутые с силой F_0 (рис. 1, а). При отклонении грузика от положения равновесия (считается, что сила тяжести отсутствует) возникает возвращающая сила $F_b = -2F \sin \alpha$ (α — угол отклонения от горизонтали). Если отклонение u мало, то можно пренебречь растяжением нитей, считать $F \approx F_0$, $\sin \alpha \approx 2u/l_0$, откуда $mu'' = -4 \frac{F_0}{l_0} u$.

Получилось уравнение (1.1), где $\omega^2 = 4F_0/(ml_0)$.

Фактически мы решили задачу о колебании струны, вся масса которой сосредоточена в центре. Для однородной струны с массой m и длиной l_0 это слишком грубое приближение, поэтому заменим ее набором N шариков массой $\mu = m/N$, расположенных на расстоянии $h = l_0/N$ друг от друга (рис. 1, б) и соединенных нитями, натянутыми с силой F_0 (таким же образом в 30-х годах XVIII в. рассуждали Иоганн и Даниил Бернулли, которые известны и как выдающиеся гидродинамики). Обозначим через u_k отклонение k -го шарика от положения равновесия и будем считать, что разница в отклонениях соседних шариков мала: $|u_k - u_{k-1}| \ll h$. Рассуждая также, можно получить выражение для возвращающей силы k -го шарика (допустим, что шарики могут двигаться только в перпендикулярном направлении):

$$F_{bk} \approx F_0 \frac{u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}}{h} = \mu a_k = \frac{mh}{l_0} \frac{d^2 u_k}{dt^2},$$

т. е.

$$\frac{d^2 u_k}{dt^2} = \frac{F_0 l_0}{m} \left(\frac{u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}}{h^2} \right). \quad (1.2)$$

Для крайних шариков $k = 1$ и $k = N$ уравнение (1.2) выглядит несколько иначе (читатель может получить его самостоятельно). Решив эту систему, можно перейти в ответе к пределу, считая что $N \rightarrow \infty$, а $h \rightarrow 0$.

Однако есть и другой путь — перейти к пределу в самом уравнении. Будем считать u непрерывной функцией не только по t , но и по x . Заметим, что $u_{k-1} = u(t, x - h)$, $u_{k+1} = u(t, x + h)$, выражение в скобках в уравнении (1.2) можно записать так:

$$\begin{aligned} \frac{u(t, x + h) - 2u(t, x) + u(t, x - h)}{h^2} &= \\ &= \frac{1}{h} \left[\frac{u(t, x + h) - u(t, x)}{h} - \frac{u(t, x) - u(t, x - h)}{h} \right]. \end{aligned}$$

Если зафиксировать $t = t_0$ и устремить h к нулю, то в пределе получается вторая производная $u(t_0, x)$ по x (поскольку t_0 фиксировано, $u(t_0, x)$ — функция только x), которая называется частной производной по x и обозначается в отличие от обычной $\partial^2 u / \partial x^2$, или u_{xx} . Стоящая слева в уравнении (1.2) вторая производная по времени теперь берется для фиксированного значения x , т. е. получается частная производная по времени u_{tt} . Возникает уравнение в частных производных

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \quad c^2 = F_0 l_0 / m, \quad (1.3)$$

называемое волновым. Концы струны будем считать жестко закрепленными, следовательно, получаем граничные условия $u(t, 0) = u(t, l) = 0$.

Вывод уравнения (1.3), впервые сделанный выдающимся французским математиком Д'Аламбером, означал переход от набора материальных точек к непрерывной среде. Модели различных сред играют принципиальную роль в современной науке.

Д'Аламбер не только выписал первое уравнение математической физики, но и нашел его общее решение

$$u = j(x - ct) + g(x + ct). \quad (1.4)$$

Это очень интересная формула, ей удобно пользоваться, когда возмущение еще не дошло до концов струны. Будем считать, что функция $g = 0$. Тогда она описывает бегущую вправо волну. Чтобы найти решение в момент вре-

мени t , надо прямо взять начальную функцию $u(0, x)$ и перенести ее вправо вдоль оси x на расстояние ct (рис. 1, в).

Решение при изменении времени оказывается подобным себе. Оно относится к важному классу самоподобных или *автомодельных* решений. Далее мы познакомимся с другими автомодельными решениями и увидим, какую большую роль они играют при исследовании различных явлений.

Если считать $f = 0$, то формула (1.4) дает волну, бегущую влево. Общее решение получается наложением или суперпозицией двух бегущих волн. Здесь мы встречаемся с очень полезным *принципом суперпозиции*: если удастся найти различные решения линейного уравнения u_1, \dots, u_N , то любая их комбинация $u = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_N u_N$, где $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ — постоянные величины, также удовлетворяет уравнению. Этот принцип намного упрощает изучение линейных уравнений, он позволяет из частных (имеющих определенные начальные данные $u(0, x)$) сшивать общее решение (которое описывает процесс при *любых* гладких начальных функциях $u(0, x)$).

Общее решение найдено, однако использовать его для описания колебаний струны не просто. Действительно, мы ударили по струне, вправо и влево в соответствии с формулой (1.1) пошли две волны. Они доходят до концов струны, каким-то образом отражаются и идут в обратную сторону. В конце концов возникает установившийся режим, описывать который с помощью формулы (1.4) неудобно. Попытаемся найти другой путь.

Вернемся к волновому уравнению и опять воспользуемся аналогией с маятником. Поскольку струна совершает колебательное движение, будем искать решение нашей задачи в виде

$$u = (A \sin \omega t + B \cos \omega t) z(x). \quad (1.5)$$

Если подставить эту формулу в уравнение и учесть, что струна закреплена на концах, получится задача

$$\begin{aligned} z''(x) + \lambda z(x) &= 0, \quad \lambda = \omega^2/c^2, \\ z(0) = z(l_0) &= 0. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Смысл функции z очень простой — она определяет, как распределены отклонения в струне, которая колеблется с частотой ω .

Посмотрим внимательно на уравнения (1.1) и (1.6). Они совпадают, значит, совпадают и их решения. Но поскольку

ку $z(0) = z(l_0) = 0$, задача (1.6) имеет решение не при всех λ , а только при некоторых:

$$z_n = \sin(\pi n x / l_0), \quad \lambda_n = (\pi n / l_0)^2, \quad \omega_n^2 = \lambda_n c^2, \quad (1.7)$$

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

Ясно, что установившиеся колебания могут существовать, если на длине струны укладывается целое число полуволн, что видно из формулы (1.7). Смысл этой формулы таков: числа λ_n (их называют *собственными значениями*) определяют, с какой частотой может колебаться струна (собственные частоты ω_n); функции $z_n(x)$ называются собственными функциями. Задачу (1.6) называют задачей на собственные значения. Поскольку собственных значений λ_n бесконечно много, их удобно пронумеровать в порядке возрастания $n = 0, 1, \dots$.

Исходя из соотношения (1.7) можно выписать общее решение волнового уравнения в виде суммы

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n \sin \omega_n t + B_n \cos \omega_n t) \sin \frac{\pi n x}{l_0}. \quad (1.8)$$

Оно по виду сильно отличается от формулы (1.4). Равноправность обоих решений далеко неочевидна. Этот вопрос стал основой научной дискуссии, развернувшейся в середине XVIII в., известной как «спор о струне». В ней приняли участие выдающиеся математики и механики Эйлер, Д'Аламбер, Лагранж. Дискуссия позволила не только убедиться в эквивалентности двух решений, но и лучше разобраться в уравнениях, описывающих разные среды.

Формула (1.8) дает возможность проследить соотношение непрерывного и дискретного в этой задаче.

Если мы будем искать автомодельные решения волнового уравнения на этот раз в виде стоячей волны

$$u(x, t) = c_n(t) \sin(\pi n x / l_0),$$

то окажется, что для разных $c_n(t)$ получаются уравнения

$$\frac{d^2 c_n(t)}{dt^2} + \omega_n^2 c_n(t) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Но это вновь уравнение для грузика на пружинке. Значит, струна оказывается эквивалентной бесконечному множеству независимых маятников. Интересно и другое — в непрерывной задаче, описывающей колебания струны, есть дискретный набор собственных частот. Непрерывное и дискретное вновь оказываются тесно связанными,

Можно только удивляться, как много задач удается решить, пользуясь волновым уравнением и методами, развитыми при его изучении. Простейший пример — акустика, наука о распространении звука. В ней возникает то же самое волновое уравнение, в котором постоянная $c = \sqrt{\gamma p/\rho}$. Вывод этого уравнения также оказывается очень наглядным, в нем используются лишь простейшие свойства газов и законы механики.

Тем же уравнением описываются волны на поверхности жидкости, имеющей малую глубину (по сравнению с длиной волны). Лагранж установил, что в этом случае $c = \sqrt{gh}$, где g — ускорение свободного падения; h — глубина жидкости.

Эти достижения математической физики, позволившие из простейших законов природы получить важные и глубокие следствия, не утратили своего значения и в наше время.

Одним из блестящих достижений физики стало создание квантовой механики. В 1926 г. австрийский физик Э. Шредингер получил уравнение, которое определяет волновые свойства материи. Оно может рассматриваться как один из наиболее глубоких законов природы, известных ученым:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + U(x)\psi, \quad \hbar = \frac{h}{2\pi}.$$

Здесь $i = \sqrt{-1}$; h — постоянная Планка ($h = 6,626 \cdot 10^{-34}$ Дж·с) — одна из фундаментальных величин, характеризующих законы микромира; $\psi(x, t) = \psi_1(x, t) + i\psi_2(x, t)$ — так называемая волновая функция (ψ_1 и ψ_2 — действительные, $|\psi|^2 = \psi_1^2 + \psi_2^2$ — определяет вероятность нахождения частицы в точке x в момент времени t); $U(x)$ — потенциал, в котором находится частица. Создание лазеров и многих электронных приборов, развитие большинства высокоточных методов анализа в физике, химии, спектроскопии было бы невысказимо без глубокого анализа этого уравнения.

При его исследовании, как и в задаче о струне, центральным моментом является построение набора частных решений (которые оказываются автомодельными), что приводит к задаче на собственные значения.

Если представить ψ в виде $\psi = \exp(iEt/\hbar)\varphi(x)$, то для $\varphi(x)$ получится уравнение

$$\frac{\hbar^2}{2m} \varphi''(x) + E\varphi = U(x)\varphi. \quad (1.9)$$

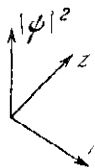
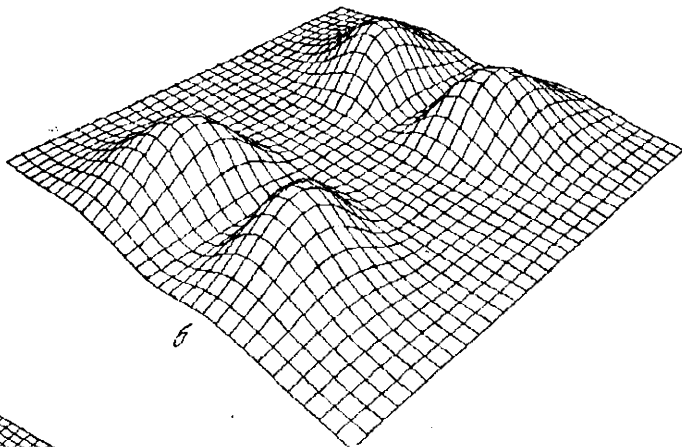
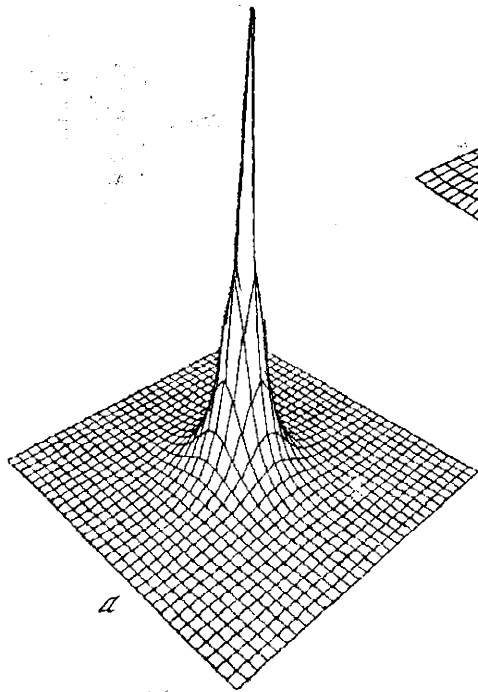


Рис. 2. Примеры собственных функций уравнения Шредингера для атома водорода

Пространственная зависимость плотности вероятности $|\psi|^2$ является функцией только двух переменных: z и $r = \sqrt{x^2 + y^2}$; а — $n = 1, m = l = 0$; б — $n = 4, l = 3, m = 2$

Будем считать, что $U = 0$ при $0 \leq x \leq l$ и $U(x) = \infty$ в остальных точках. В этом случае (1.9) совпадает с задачей для струны, которую мы уже решили. Для нее мы знаем и собственные значения и собственные функции.

Собственные значения характеризуют набор возможных энергий электрона, а собственные функции — так называемые чистые состояния (это те же самые стоячие волны). Если электрон находится в таком состоянии, то, измеряя его энергию, получим одно и то же значение. Вероятность найти электрон в различных точках пространства также от времени не зависит. В других состояниях это не так.

Одним из самых замечательных результатов в истории квантовой механики было объяснение спектров простейших атомов и закономерностей, наблюдаемых в периодической таблице Менделеева.

Для того чтобы понять, с чем связано наличие дискретных линий, например в спектре атома водорода, и уметь теоретически предсказывать этот спектр, нужно решить то самое уравнение Шредингера.

Электрон в атоме водорода движется вокруг протона, поэтому в соответствии с законом Кулона $U = -e^2/r$ (r — расстояние от протона). Поскольку движение происходит в трехмерном пространстве, уравнение запишется в виде

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) - \frac{e^2 \psi}{r}. \quad (1.10)$$

Действуя в точности так же, как в случае со струной, можно получить задачу на собственные значения и найти их количественные значения, которые замечательно согласуются с результатами наблюдений. Правда, собственные функции здесь будут сложнее (обычные синусы и косинусы не подходят). Поскольку задача решается в трехмерном пространстве, то у них будет не один, а три индекса, $\psi = \psi_{n, l, m}$. (n характеризует энергию электрона; $E_n \sim -1/n^2$; l — угловой момент; m — магнитные свойства этого состояния).

Примеры двух собственных функций представлены на рис. 2.

Несмотря на то что их вид довольно сложен, они могут быть найдены после ряда аналитических выкладок. С уравнением Шредингера связано и объяснение свойств химических элементов.

Все эти достижения показали ученым, что они верно понимают многие глубокие и тонкие законы природы, име-

ют хорошие математические модели в ряде областей и эффективные средства их анализа. Переход от дискретного к непрерывному оказался очень плодотворным в изучении природы.

Но точку здесь ставить рано, на сцену выходит главный герой нашего рассказа — нелинейность. Посмотрим еще раз на задачи, о которых говорилось выше.

При малых отклонениях от положения равновесия силу можно было определить из линейного соотношения $F = -kx$. Но отклонения не всегда малы, и тогда надо пользоваться более точными выражениями: для маятника $F = -k \sin x$, для пружины $F = -kx - \beta x^3$, для струны надо учитывать растяжение связывающих нитей и изменение их натяжения, что приводит к появлению членов вида $(u_x)^2$ и т. д.

На первый взгляд разница невелика — вместо одного сложного уравнения получили другое. Однако даже малая нелинейная добавка качественно меняет ситуацию: сумма двух решений уже не удовлетворяет уравнению. Принципа суперпозиции нет — «сшить» общее решение из частных не удастся. Нужны другие подходы.

Линейные уравнения акустики прекрасно описывают распространение звука, когда его громкость невелика (при этом скорость звука не зависит от громкости). Если звук очень громкий, например от взрыва, может возникнуть ударная волна. Ее скорость зависит от разности давлений за волной и перед ней. Объяснение то же — нелинейность уравнений, описывающих это явление.

Посмотрим на уравнение Шредингера. Оно замечательно описывает поведение одной частицы в каком-нибудь заданном потенциале. Но интересны обычно задачи для нескольких частиц, например в сложном атоме. В этом случае электрон находится в поле, создаваемом ядром и другими электронами. Но на них он сам активно воздействует, а значит, находится в поле, в создании которого сам участвует. Расчет такого самосогласованного поля и волновых функций более сложных атомов вновь приводит к нелинейности.

Наконец, есть фундаментальные уравнения, которые сами по себе нелинейны. Это уравнения гидродинамики, уравнения, возникающие в современных теориях поля, и ряд других. Нелинейность возникает при анализе большинства реальных систем.

Чтобы разобраться с нелинейными уравнениями, с явлениями природы, которые они описывают, ученым при-

шлось обратиться к помощи вычислительных машин, создать новые области науки, пересмотреть многие традиционные представления.

2. НЕЛИНЕЙНЫЕ МОДЕЛИ

Главное — это из множества проблем выбрать наиболее простые, решение которых позволит выработать допускающие обобщения концепции

Д. Гильберт

Представим, что у нас есть компьютер, который умеет решать различные уравнения. Остается только задать начальные данные и граничные условия и посмотреть, как ведет себя решение. Попробуем выяснить, к чему приводит появление нелинейности в простейших математических моделях.

Не менее известным, чем волновое уравнение, является уравнение теплопроводности. Оно может описывать передачу тепла, диффузию частиц, проникновение магнитного поля в плазму и многие другие процессы. Уравнение теплопроводности записывается в виде

$$T_t = kT_{xx} \quad (2.1)$$

где $T(x, t)$ — температура в точке x в момент t ; k — коэффициент теплопроводности, который обычно считается постоянным. Это уравнение можно исследовать точно так же, как волновое уравнение².

Однако мы поступим иначе. Для простоты будем считать, что образец, по которому распространяется тепло, настолько большой, что его можно считать бесконечным ($-\infty < x < \infty$). Пусть в начальный момент до высокой температуры нагрет маленький участок. Проследим с помощью ЭВМ за распространением тепла. На рис. 3, а показаны профили температуры в разные моменты времени. Видим, что максимум температуры A уменьшается (компьютер может сообщить нам, что $A \sim t^{-1/2}$), а полуширина³ L растет ($L \sim t^{1/2}$).

² Если считать, что $0 \leq x \leq l$, $T(0) = T(l) = 0$, то собственные функции будут такими же, как в задаче о струне, а решение по аналогии с (1.8) может быть записано в виде

$$T(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \exp\left(-\frac{\pi^2 n^2 t}{l^2}\right) \sin \frac{\pi n x}{l}.$$

³ Полуширина — ширина профиля температуры на уровне 0,5 A ,

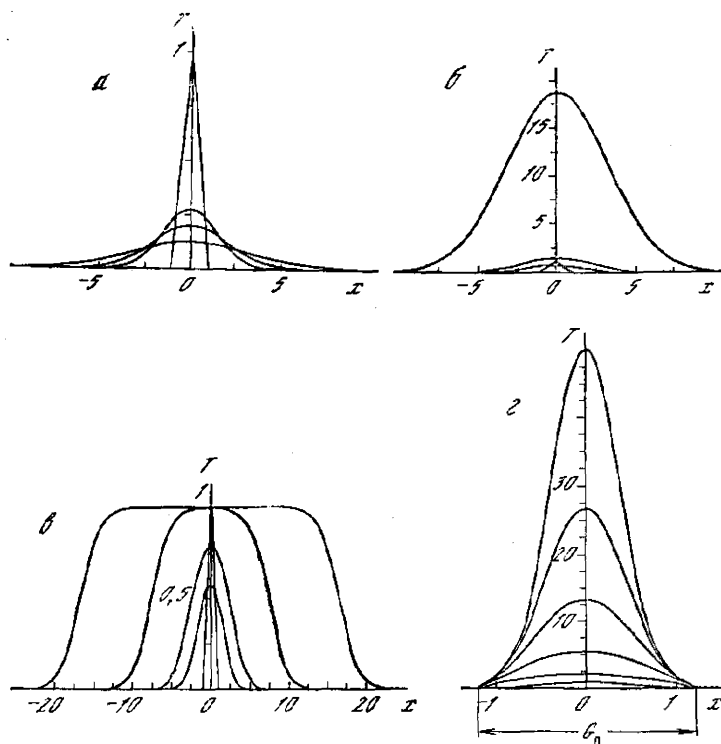


Рис. 3. Решение уравнения теплопроводности для $k = 1$

a — уравнение без источника; *б* — линейный источник ($q = 1$); *в* — нелинейный источник ($qT - \alpha T^3$, $q = \alpha = 1$); *г* — решение уравнения (2.4) ($k_0 = q_0 = 1$; $\beta = 3,5$; $\sigma = 2$)

Это и понятно. От более нагретых участков образца тепло передается менее нагретым. При этом температура первых уменьшается, а вторых растет. Поскольку количество тепла остается постоянным, $AL \approx \text{const}$.

Теперь рассмотрим среду, в которой происходит процесс горения. Будем считать, что интенсивность горения пропорциональна температуре. Это приводит к линейному уравнению

$$T_t = kT_{xx} + qT. \quad (2.2)$$

Решение этого уравнения для тех же начальных данных представлено на рис. 3, б. Сравним его с рис. 3, а. Амплитуда A растет, а полуширина меняется по тому же закону. ($L \sim t^{1/2}$). Вообще, обе картинки очень похожи,

Посмотрим внимательно на уравнение (2.2). Нельзя ли его привести к более простому виду? Оказывается, можно. Надо только заменить переменные $T_1 = e^{qt}T$, и для T_1 получается уравнение (2.1). Значит, $A \sim e^{qt}t^{-1/2}$, что совпадает с результатами расчета.

Посмотрим, что произойдет, если источник нелинеен:

$$T_t = kT_{xx} + qT - \alpha T^3. \quad (2.3)$$

Поясним смысл этого уравнения. Наличие такого нелинейного члена говорит о том, что при больших температурах горение прекращается. Это может быть связано с выгоранием топлива или с тем, что с ростом T большую роль начинают играть эндотермические реакции (идущие с поглощением тепла). Уравнение (2.3) возникает не только в теории горения. С его помощью, например, моделируют распространение эпидемии, прохождение импульса по нервному волокну и другие явления. В работе А. Н. Колмогорова, И. Г. Петровского, Н. С. Пискунова (1937 г.) такие уравнения рассматривались, как модель распространения гена.

Посмотрим, как выглядят решения этого уравнения (см. рис. 3, *в*). Они поразительно отличаются от того, что мы видели раньше. Возникает тепловая волна, распространяющаяся с постоянной скоростью, амплитуда которой стремится к постоянному значению $\sqrt{q/\alpha}$.

Но ведь бегущая волна — это знакомое нам автомодельное решение вида $f(x - ct)$. Причем в отличие от задачи о струне, где функция f могла быть любой, здесь f только одна, она определяется свойствами нелинейной среды.

Роль автомодельных решений здесь совершенно другая. Раньше мы строили большой набор автомодельных решений (стоячих волн в задаче о струне), чтобы «сшить» из них общее, для каждого начальных данных свое ⁴. Здесь при разных начальных данных на больших временах решение описывается этой бегущей волной (математики говорят, что бегущая волна определяет асимптотику процесса при $t \rightarrow \infty$). В этом можно убедиться, задавая на ЭВМ различные начальные данные. Доказать это гораздо труднее.

Сравним уравнения (2.1) и (2.3). В первом случае у нас нет ни источников, ни стоков тепла, во втором присутствует и то и другое, что является типичным для так называе-

⁴ Именно начальными данными определяются коэффициенты a_n и b_n в формуле (1.8).

мых открытых систем. «Забывание» начальных данных (т. е. выход с целого класса начальных профилей на одно и то же решение) характерен для большого класса открытых нелинейных систем. Причем решение, на которое происходит выход, часто оказывается автомодельным. (Об их важной роли в изучении нелинейных уравнений речь пойдет в последней статье этого сборника.)

Такое поведение говорит о возникновении упорядоченности в системе, или о *самоорганизации*. В самом деле, выход на автомодельное решение означает уменьшение числа степеней свободы и выделение нескольких основных (*параметров порядка*), к которым подстраиваются все остальные. Вспомним задачу о струне. Чтобы полностью описать ее движение, нужно знать функции u и u_t в каждой точке (или, что то же самое, положение и скорость каждого из бесконечной последовательности маятников). Здесь, чтобы определить движение тепловой волны на больших временах, достаточно знать одну для всех решений функцию f , скорость и начальную полуширину L_0 . Это очень глубокий факт — от непрерывных начальных данных удается перейти к одному параметру L_0 . Он открывает огромные возможности для упрощенного описания таких систем.

Таким образом, появление одного нелинейного члена (стока тепла) кардинально изменило поведение решений, позволило описывать совершенно другой круг явлений.

Системы, содержащие нелинейные источники, обладают еще более неожиданными свойствами. В качестве примера рассмотрим уравнение теплопроводности, в котором коэффициент k нелинеен и есть источник Q , зависящий от температуры. Такие задачи характерны для физики плазмы, задач химической кинетики и экологии. Нелинейный источник у них обладает следующим свойством: чем больше отклонение от равновесия, тем быстрее идет процесс. (В качестве примера читатель может представить лыжника, съезжающего с горы, которая становится все круче.) Уравнение имеет вид:

$$\begin{aligned} T_t &= (k(T) T_x)_x + Q(T), \quad k(T) = k_0 T^\sigma, \\ Q(T) &= q_0 T^\beta, \\ \beta &> \sigma + 1, \quad k_0, q_0 > 0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Вновь обратимся к помощи ЭВМ (см. рис. 3, з). Обратим внимание на два принципиальных отличия от поведения всех решений, обсуждавшихся в этой главе.

Профиль температуры оказывается локализованным внутри области G_L , вне которой $T(x, t) = 0$. Из непрерыв-

ной среды при этом выделяются ограниченные участки, в пределах которых и происходит горение⁵.

Решение существует только в течение ограниченного времени, часто называемого временем обострения (его обозначают через t_f). За это время функция $T(x, t)$ в одной или нескольких точках, а иногда и в целой области обращается в бесконечность.

Еще недавно математики полагали, что такие решения не представляют особого интереса, что их наличие говорит о несовершенстве модели. Однако развитие физики плазмы, газовой динамики и других областей привело к появлению содержательных задач, в которых ведущими оказываются один или несколько наиболее быстрых процессов. Их-то и удобно описывать такими решениями, растущими, как сейчас говорят, в режиме с обострением. Конечно, в реальных системах величина температуры будет ограничена, однако ее рост на несколько порядков (а в некоторых случаях и в несколько раз) позволяет наблюдать многие интересные эффекты, предсказываемые теорией.

Посмотрим внимательно на решение (см. рис. 3, з). На первый взгляд кажется, что локализованные профили температуры в процессе эволюции остаются подобными себе. Не определяются ли и они автомодельными решениями? Догадка оказывается верной — на развитой стадии (когда выделившееся тепло намного превышает количество теплоты в начальный момент) процесс горения описывается формулой

$$T = g(t) f(x/\varphi(t)). \quad (2.5)$$

Здесь $g(t)$ определяет закон роста амплитуды; $\varphi(t)$ — полуширины; f — форму профиля температуры ($g(t) \xrightarrow{t \rightarrow t_f} \infty$, $\varphi(t) \xrightarrow{t \rightarrow t_f} 0$).

Обратим внимание на то, что в пределах области локализации горение происходит согласованно в разных точках пространства. Для этой нелинейной среды также характерно «забывание» деталей начальных данных. Выход на решение вида (2.5) говорит о спонтанном возникновении упорядоченности, о формировании локализованных структур.

⁵ Отметим, что явление локализации связано с нелинейностью системы. Для сред, процессы в которых описываются линейными уравнениями, локализация также возможна, но она обусловлена не свойствами самой среды, а характером внешних воздействий.

Само их существование представляется парадоксальным. В среде, где есть только горение и теплопроводность — диссипативный процесс, связанный с рассеянием энергии, обычно уничтожающий всякую упорядоченность, возникают структуры, сохраняющие свою форму. Чтобы подчеркнуть необычность этого явления, их называют диссипативными (структуры, которые списывает уравнение (2.4), часто называют тепловыми).

Познакомимся поподробнее с диссипативными структурами. Ясно, что у них есть две важные характеристики. Это время их жизни t_f и область локализации S_L . Если в среде независимо развиваются две локализованные структуры с разными временами обострения $t_{1/2} > t_{f1}$, то практически горение происходит на временах $\sim t_{f1}$ только в первой и «замирает» во второй. Реально «живут в одном мире» только структуры с одинаковыми временами обострения.

А если попробовать объединить несколько структур так, что их области локализации пересекутся? Структуры начинают взаимодействовать, возникает волна горения сложной формы, сходящаяся к центру. Однако форма эта с ростом температуры меняется, и в конце концов остается одна простая, быстро горящая структура. Встает вопрос, можно ли построить сложные структуры, сохраняющие в процессе эволюции свою форму?

Вопрос о наборе форм, заключенном в различных средах, является очень глубоким. И для древних философов, и для многих физиков-теоретиков, занимающихся элементарными частицами, характерно представление о сложном наборе структур, которые потенциально заключены в одной и той же среде. Некоторые из них встречаются часто, другие могут возникать только в определенных условиях. Однако и те и другие характеризуют глубокие внутренние свойства системы.

Мы рассмотрим простейшую среду, которая описывается уравнением (2.4), и попробуем разобраться, какие формы заключены в ней. Вспомним задачу о струне. Важную роль в ней играли собственные функции. Они определяли форму ряда решений, не меняющуюся со временем, а также начальные данные, при которых процессы шли согласованно во всей области, а поэтому были самым тесным образом связаны с краевыми условиями.

Роль функции f , определяющей геометрию диссипативных структур, похожа. Для них также можно выписать аналог задачи на собственные значения (уже нелинейный).

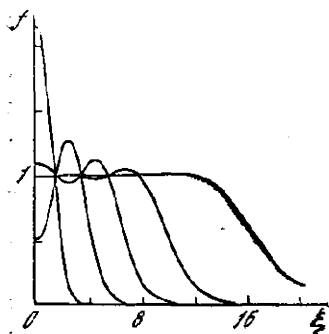


Рис. 4. Полный набор собственных функций нелинейной среды

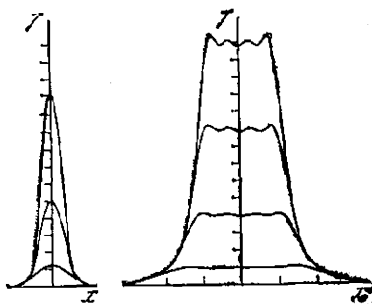


Рис. 5. Эволюция простой и сложной структур

Они определяют локализованные конфигурации, в пределах которых процессы идут согласованно. Именно поэтому их во многих работах называют *собственными функциями нелинейной среды*.

Однако в отличие от линейных задач они описывают локализованные процессы и никак не связаны с краевыми условиями. Первая собственная функция описывает так называемую простую структуру с одним максимумом температуры. (Выход на нее мы и видели на рис. 3, г.) Но может быть, по аналогии с линейными задачами можно ожидать существования других, более сложных (так называемых высших) собственных функций?

Исследование этой задачи привело к очень интересным результатам. Для уравнения (2.4) удалось построить с помощью компьютера полный набор собственных функций для различных значений β и σ . Посмотрим, каковы они для $\beta = 3,5$ и $\sigma = 2$ (рис. 4). Сложную структуру можно рассматривать как объединение нескольких простых. Причем простые могут иметь различную амплитуду.

Высшие собственные функции определяют законы организации простых структур в сложные. Они показывают способы объединения структур «разного возраста», при котором все они развиваются согласованно и имеют одно и то же время существования. Обратим внимание на размеры областей локализации сложных структур — они в несколько раз больше, чем у простых.

В отличие от задачи о струне или об атоме водорода здесь существует конечное число собственных функций. Следовательно, есть некое предельное количество

структур, больше которого объединить в данной среде в одно целое не удастся.

Эволюция одной из сложных структур показана на рис. 5. Видно, что она представляет собой сходящуюся к центру волну горения, сохраняющую свою форму. Взятые наугад начальные данные будут вырождаться в одну или несколько простых структур. Здесь же процесс идет совершенно по-другому. Высшие собственные функции определяют все начальные данные, при которых существуют сложные структуры, именно поэтому постановка таких начальных данных во многих работах называется резонансным возбуждением системы. По-видимому, такие способы воздействия существуют и в более сложных нелинейных системах. Во многих случаях знание их было бы очень полезно.

После того как собственные функции были построены с помощью ЭВМ, обнаружилась простая закономерность. В решении есть два участка — «область колебаний» и монотонный «хвост». И то и другое можно приближенно описать с помощью более простых уравнений, которые решаются аналитически. Число и геометрию собственных функций ученые научились предсказывать, не обращаясь для этого каждый раз к ЭВМ⁶.

Это типично для многих задач, при решении которых используются методы информатики. После того как с помощью ЭВМ удастся «заглянуть в ответ», становятся видны другие подходы, более простые приближенные методы. Во многих случаях это имеет огромное значение.

Выше мы иллюстрировали все свойства тепловых структур на примере уравнения (2.4), где $T = T(x, t)$, и его двумерного аналога, где $T = T(x, y, t)$. В двумерном случае также существуют собственные функции, зависящие от одной переменной $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, которые описывают концентрические волны горения, сходящиеся к центру. Однако возникло предположение, что в многомерном случае структур гораздо больше.

Найти их даже с помощью современных ЭВМ оказалось нелегко. Здесь помогло использование аналитических методов, позволивших довольно точно «объяснить» компьютеру, что и в какой области искать⁷.

⁶ Еленин Г. Г., Курдюмов С. П., Самарский А. А. Нестационарные диссипативные структуры в нелинейной теплопроводной среде // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1983. Т. 23, № 2. С. 380—390.

⁷ Курдюмов С. П., Куркина Е. С., Потанов А. Б., Самар-

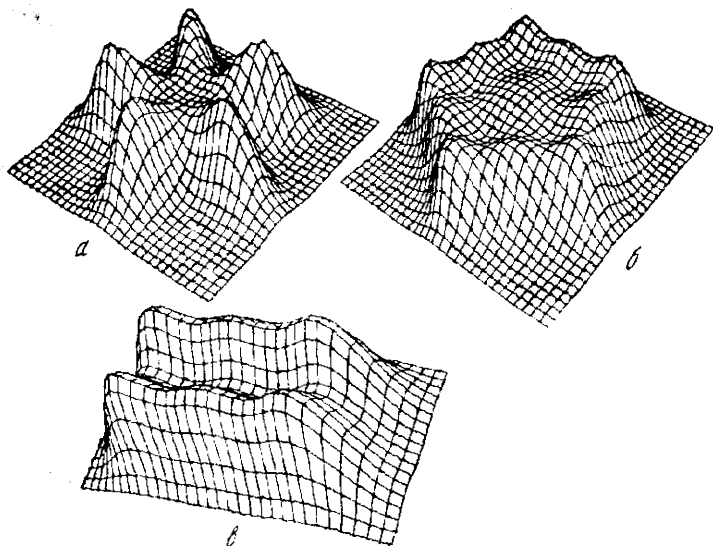


Рис. 6. Примеры многомерных собственных функций нелинейной среды

Некоторые из собственных функций показаны на рис. 6. Их архитектура оказывается гораздо сложнее, чем в одномерном случае. Раньше видна была простая закономерность — чем дальше от центра, тем больше амплитуды простых структур (см. рис. 4). Здесь появился новый элемент — конфигурации могут иметь различную симметрию, при этом простые структуры по определенным законам располагаются вдоль нескольких концентрических окружностей или прямых.

Результаты, полученные при исследовании тепловых структур, заинтересовали специалистов по физике плазмы, химической кинетике, биофизике и многих других. Представления, накопленные при изучении этой задачи, позволили развить глубокие математические теории, разработать новые методы⁸.

ский А. А. Сложные многомерные структуры горения нелинейной среды // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1986. Т. 26, № 8. С. 1187—1205.

⁸ Самарский А. А., Курдюмов С. П., Галактионов В. А., Михайлов А. П. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений, М.: Наука, 1987.

Однако не менее важным представляется другое. Возникла совершенно новая постановка вопроса. Во многих нелинейных средах существуют законы организации диссипативных структур. Простые структуры определенным образом могут быть объединены в сложные. Чтобы управлять процессами в таких средах в первую очередь надо изучать эти законы. Можно ожидать, что на этом пути ученых ждет много интересных результатов.

Возникновение структур, самоорганизация в простейших нелинейных средах сейчас вызывает большой интерес ученых. Может быть, она окажется прообразом появления организации на разных уровнях и в более сложных системах. Разумеется, анализ простейших моделей не может заменить глубокого исследования сложных явлений. Однако он может дать ученым полезную «подсказку», определить направление поисков.

3. СТРУКТУРЫ И ОРГАНИЗАЦИЯ В ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМАХ

Главная задача математики наших дней состоит в достижении гармонии между континуальным и дискретным, включении их в единое математическое целое и удалении из них всего неясного.

Ф. Т. Белл

Мы говорим «проведем расчет», «воспользуемся помощью ЭВМ». Попробуем разобраться, что же происходит в вычислительной машине. В самом деле, и уравнение теплопроводности, и волновое уравнение описывают непрерывные системы с бесконечным числом степеней свободы. Вместе с тем ЭВМ представляет собой набор конечного числа логических элементов и элементов памяти, которые могут находиться в одном из нескольких фиксированных состояний. Это типично дискретная система.

Чтобы что-то посчитать, нужно научиться переходить от непрерывных уравнений математической физики к их дискретным аналогам. На первый взгляд все представляется очень простым. Вспомним задачу со струной, которую мы вначале заменяли набором пружинок и шариков. Попробуем действовать также, решая, например, уравнение теплопроводности.

Заменяем непрерывную функцию $T(x, t)$, заданную при $0 \leq x \leq l$, дискретной $T_n(t)$, которая определена в точках $x = 0, h, 2h, \dots, Nh$ ($Nh = l$). Посмотрев на

формулу (1.2) естественно заменить T_{xx} в точке $x = nh$ на $(T_{n-1} - 2T_n + T_{n+1})/h^2$.

Но $T_n(t)$ непрерывно зависит от времени, поэтому на машине мы ее вычислить не сможем. От непрерывного времени $0 \leq t \leq T$ придется перейти к дискретному. Вместо функций $T_n(t)$ будем рассматривать набор чисел T_n^k , который должен определять температуру в точках $x = nh$ в моменты времени $t = k\tau$. Чтобы заменить производную по времени, вспомним ее определение: это предел $(T(x, t + \tau) - T(x, t))/\tau$ при $\tau \rightarrow 0$. Итак, вместо уравнения (2.1) получается его дискретный аналог, или *разностная схема* (κ — коэффициент теплопроводности)

$$\frac{T_n^{k+1} - T_n^k}{\tau} = \kappa \frac{T_{n-1}^k - 2T_n^k + T_{n+1}^k}{h^2}. \quad (3.1)$$

Нам остается написать программу, которая будет вычислять T_n^{k+1} по T_n^k по этой формуле, и задать в качестве начальных данных набор чисел T_n^0 .

Эта разностная схема обладает многими полезными свойствами. При $\tau \rightarrow 0$ и $h \rightarrow 0$ соотношение (3.1) стремится к задаче (2.1). (Это свойство называется аппроксимацией.) Если известны числа T_n^k , то по ним мы можем найти T_n^{k+1} по формуле (3.1) безо всяких промежуточных этапов. Такие схемы называются *явными*.

Попробуем подсчитать какую-нибудь задачу, взяв к примеру $\tau \sim h \sim \varepsilon$, где ε — некоторое маленькое число. Почти наверняка ЭВМ сообщит, что это невозможно — T^n принимают огромные значения, которые, конечно, не имеют никакого отношения к решению уравнения (2.1). Ни увеличение быстродействия компьютера, ни повышение точности здесь не помогают. При этих значениях τ и h у схемы нет *устойчивости*. Схема устойчива по начальным данным, если их малое изменение приводит к малому изменению решения. Чтобы схема (3.1) была устойчива, надо, чтобы $\tau < h^2/2$. Только в этом случае можно надеяться на разумный результат.

Впрочем, для уравнения (2.1) можно писать и другие разностные схемы, например неявные, в которых разностный аналог второй производной определяется не только

⁹ Чтобы приступить к расчетам, пужно задать еще и крайние условия — решить, как будут вычисляться T_0 и T_N . (Например, если потока тепла вовсе нет, то можно считать $T_0 = T_1$, $T_N = T_{N-1}$.)

через T_n^k , но и через T_n^{k+1} . Тогда найти T_n^{k+1} по T_n^k будет гораздо сложнее, но у таких схем есть свои достоинства.

Часто ученым приходится иметь дело со сложными многомерными задачами, для которых построить хорошую схему далеко не просто. Тут нужно решать, какие наиболее важные свойства непрерывной среды следует передать в ее разностном аналоге. Многие уравнения в физике основаны на законах сохранения (энергии, импульса и т. д.). Иногда полезно записать аналоги законов сохранения для разностных схем. Схемы, для которых они выполняются, получили название консервативных. Обычно именно они применяются в задачах физики плазмы и газовой динамики¹⁰.

Вернемся к уравнению теплопроводности. Расскажем еще об одном интересном способе его решения с помощью компьютера. Уравнение (2.1) описывает не только теплопроводность, но и диффузию частиц. В процессе диффузии частица случайным, хаотическим образом сталкивается с другими частицами и меняет направление движения, все дальше и дальше удаляясь от начальной точки. При этом (как и в уравнении Шредингера) $T(x, t)$ определяет, с какой вероятностью частица будет находиться в точке x в момент времени t .

Этим можно воспользоваться и для решения уравнения теплопроводности. Будем имитировать случайное блуждание одной, второй, N -й частицы. Посмотрим, как распределились они вдоль оси x в момент времени t . Это и будет приближенное значение функции $T(x, t)$ в этот момент.

Удивительным является то, что можно воспользоваться случайным хаотическим поведением частиц для решения детерминированного уравнения, никакой случайности не содержащего. Хаос и порядок оказываются тесно связанными.

Случайные числа оказываются полезны и во многих других задачах. Методы, где они используются, получили название методов Монте-Карло. Большой интерес к ним возник после появления компьютеров с большим быстродействием. Впрочем, решение ряда фундаментальных задач современной теоретической физики, связанных с применением методов Монте-Карло, требует повышения быстродействия компьютеров на несколько порядков.

¹⁰ Примеры таких схем и задачи, решенные с их помощью, приведены в книге Самарский А. А., Попов Ю. П. Разностные методы решения задач газовой динамики, М.: Наука, 1980.

Читатели сами могут воспользоваться такими методами для вычисления площади разных фигур или объемов сложных тел. Например, можно с их помощью найти значение числа π . Впишем в единичный квадрат круг и будем случайным образом ¹¹ заполнять квадрат точками. Отношение числа точек N_i , попавших в круг, к общему числу точек N при увеличении N будет стремиться к величине $\pi/4$.

Использование случайных чисел в науке имеет большую историю. Поэтому читатель может воспользоваться ими и не обращаясь к компьютеру.

В 1733 г. Ж. Бюффон сформулировал следующую задачу. Пусть плоскость заполнена параллельными линиями, отстоящими друг от друга на единицу. Будем случайным образом бросать на плоскость иглу длины L ($L < 1/2$) и считать вероятность того, что игла не пересечет ни одной линии на плоскости (если таких случаев будет \bar{N} из общего числа N , то $p \approx \bar{N}/N$). После несложных выкладок можно убедиться, что $p = 2L/\pi$.

В 1812 г. Лаплас обратил внимание на то, что таким образом можно экспериментально найти значение π . К 1850 г. относится самая ранняя публикация, в которой число π было вычислено таким способом ($N = 5000$).

История на этом не кончается. π — иррациональное число, а поэтому точность результата при N бросаниях зависит от L (конечно, $p \rightarrow 2L/\pi$ при $N \rightarrow \infty$). И зависимость эта не простая. Может быть она покажется любопытной кому-нибудь из читателей, интересны были бы и другие содержательные обобщения задачи Бюффона ¹².

Двумя методами решения задач, связанных с описанием различных сред, возможности вычислительной математики не исчерпываются. Ее арсенал сегодня очень широк. Насколько полезны представления о нем для тех, чьей профессией информатика не является?

Физики, инженеры, химики часто применяют, имея дело с ЭВМ, пакеты прикладных программ, разработанных

¹¹ Существует много алгоритмов, с помощью которых вычислительные машины генерируют наборы чисел, близкие к случайным (так называемые псевдослучайные числа). Один из них таков. Строится последовательность целых чисел $m_{k+1} = gm_k \pmod{N}$. Псевдослучайными числами, равномерно распределенными в интервале $(0, 1)$, будут $\gamma_k = m_k N^{-1}$. Подробнее см. литературу в конце статьи.

¹² Некоторые математические вопросы, связанные с ней, обсуждаются в статье: *Grigleman N. T. Geometric probability and the number π* // *Scripta Mathematica*, 1960, Vol. 25, N 3. P. 183.

ные профессионалами, или пользуются помощью специалистов по вычислительной математике. Однако иногда ученые ставят задачи, которые находятся на пределе возможностей современных ЭВМ (а порой и за пределами). Задачи могут обладать важными особенностями, которые не могут быть переданы с помощью стандартных методов. Здесь знакомство специалиста, который хочет воспользоваться вычислительной машиной, с простейшими алгоритмами и возможностями ЭВМ будет полезно. Это поможет ему найти общий язык с математиками и более четко сформулировать свои проблемы.

Рассказывая о разностных схемах и о случайных числах, мы рассматривали их как полезный инструмент, позволяющий судить о непрерывных системах с помощью дискретных.

Тут может возникнуть несколько вопросов. Могут ли дискретные системы описывать такие типы упорядоченности, которые мы пока не встречали в непрерывных средах? Можно ли их непосредственно использовать как модели каких либо явлений?

Прежде чем обсудить эти вопросы, познакомим читателей с некоторыми типами упорядоченности в дискретных системах. Законы организации структур в них читатель может исследовать, располагая практически любой ЭВМ, снабженной дисплеем, а во многих случаях просто имея под рукой лист бумаги в клетку.

Более 15 лет назад математик из Кембриджского университета Джон Конвей предложил игру под названием «Жизнь». Название связано с тем, что она имитирует рост, распад и различные изменения в популяции живых организмов.

Рассматривается бесконечная плоская решетка квадратных ячеек-клеток. Время в этой игре дискретно ($t = 1, 2, \dots$). Клетка может быть живой или мертвой. Изменение ее состояния в момент $t + 1$ определяется состоянием ее соседей в момент t (соседей у каждой клетки 8, из них 4 имеют с ней общие ребра, а 4 только вершины). Правила таковы.

Если клетка мертва в момент времени t , она оживает в момент $t + 1$ тогда и только тогда, когда трое из ее восьми соседей были живы в момент t .

Если клетка была жива в момент времени t , она погибает в момент $t + 1$ тогда и только тогда, когда меньше чем две или больше чем три соседние клетки были живы в момент t .

Эти правила очень просты. Имея лист бумаги в клетку, можно проследить эволюцию простейших конфигураций. Компьютер позволяет следить за поведением больших сообществ на больших временах. Прежде чем знакомиться с различными свойствами этой системы, читателю будет полезно поэкспериментировать самому. Можно задать в начальный момент несколько живых клеток и посмотреть, что с ними произойдет в конце концов.

Как мы убедимся далее, есть глубокая аналогия между процессами в нелинейных диссипативных средах и этой дискретной системой. Поэтому естественно поставить следующие вопросы. Какие основные типы структур (т. е. конфигураций, определяющих поведение сообществ клеток на больших временах) могут существовать в такой системе? Каковы здесь законы организации структур? Могут ли они взаимодействовать и к чему это приводит?

Простейшими структурами здесь являются стационарные, т. е. не зависящие от времени. Их примеры показаны на рис. 7, а. В центре живой клетки мы ставим черный кружок. По краям квадрата нанесены деления с интервалом в две клетки. Если у читателя возникнут сомнения, какая конфигурация изображена, он может взять линейку, соединить соответствующие деления на противоположных сторонах и уточнить ее расположение.

С помощью этих стационарных структур можно получить множество других. В самом деле, если мы имеем такую структуру, то конфигурация, полученная поворотом на 90° , также будет стационарной. Четыре конфигурации справа в нижнем ряду на рис. 7, а показывают, как можно достраивать определенные структуры до любых размеров.

Но главное состоит в том, что эти структуры локализованы. Будучи разделенными двумя белыми клетками, они не влияют друг на друга.

Структуры, показанные на рисунке, не исчерпывают всего их множества. Читатели сами могут найти много других интересных конфигураций.

Можно считать, что стационарные структуры повторяют себя на каждом шагу по времени. А если через 2, 3 или N шагов? Такие конфигурации будем для краткости называть циклами. Они описывают периодические процессы в сообществах клеток.

Циклы-2 показаны на рис. 7, б. Смотреть здесь нужно по строкам. Поскольку циклы-2 тоже локализованы, то

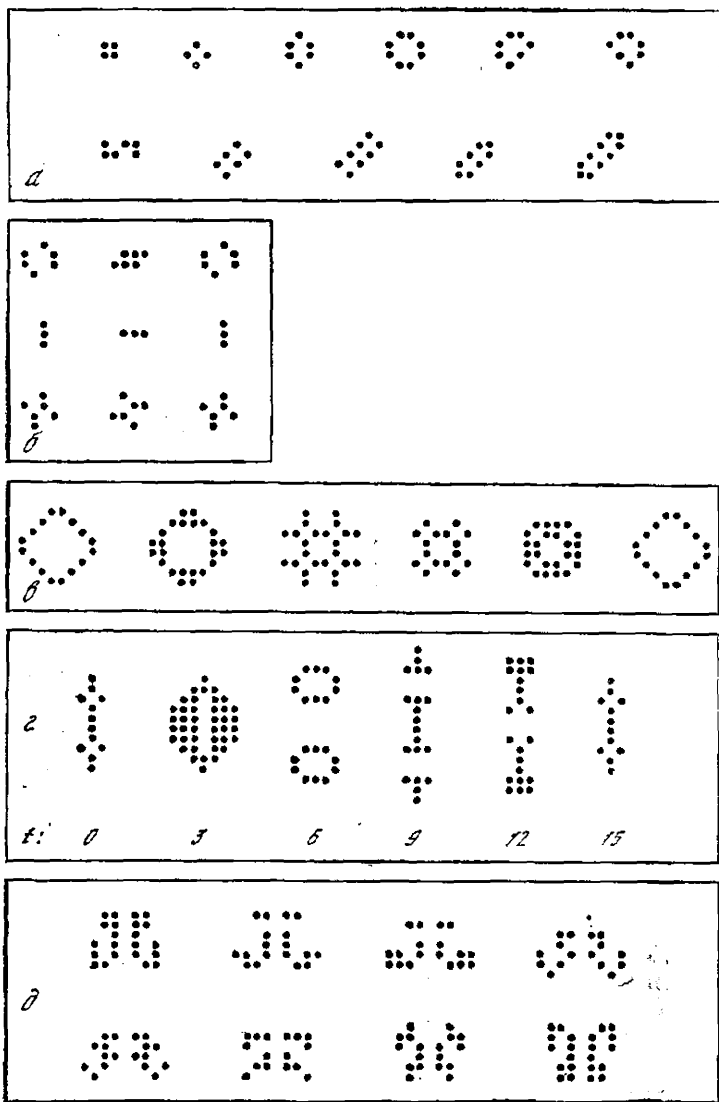


Рис. 7. Примеры стационаров и циклов в игре «Жизнь»

все они представлены в одной области. При эволюции различных сообществ часто встречается цикл-2, показанный во второй строке. Его часто называют «семафором». Цикл-5 представлен на рис. 7, в. (Там, где не указаны значения t , конфигурации приводятся с шагом по времени 1.)

Несмотря на небольшое число клеток, составляющих цикл, его период может быть довольно большим (рис. 7, г). В процессе эволюции конфигурация может повернуться как целое на 180° , а затем вернуться в исходное положение. Этим свойством обладает цикл-15 (рис. 7, д).

Читатели могут построить много других любопытных циклов. Еще интересно было бы найти алгоритм, позволяющий строить различные конфигурации с данным периодом N .

В нелинейных диссипативных средах структуры были интересны не только сами по себе. Они определяли поведение системы на развитой стадии в случае различных начальных данных. Так ли это в нашей дискретной системе?

Проследим за эволюцией нескольких конфигураций. Из квадрата со стороной 9 возникает одна стационарная структура и четыре «семафора» (рис. 8, а). Квадрат со стороной 10 дает совершенно другую картину. Возникает одна из стационарных конфигураций, не показанных на рисунке 7, а, а с ней еще один способ построения сложных структур (рис. 8, б).

Увеличение размеров начального квадрата принципиально меняет возникающие типы упорядоченности, что говорит о сложности этого дискретного мира. Однако обычно мы сталкиваемся с возникновением одной или нескольких локализованных структур и простейших циклов.

Вместе с тем возможны и более сложные типы эволюции, когда сообщество клеток симметрично «доставляется», об этом говорит сравнение шагов 2 и 17, 3 и 18, 4 и 19 (рис. 8, в), и приводит к формированию цикла, имеющего сложную форму.

Посмотрим, какие типы упорядоченности еще есть в игре «Жизнь». На рис. 9, а представлена замечательная конфигурация, называемая «планер» (стационарная структура здесь поставлена в качестве точки отсчета).

Через каждые четыре шага планер повторяет себя, но сместившись на одну клетку вниз и вправо (понятно, что в силу симметрии есть планеры, распространяющиеся

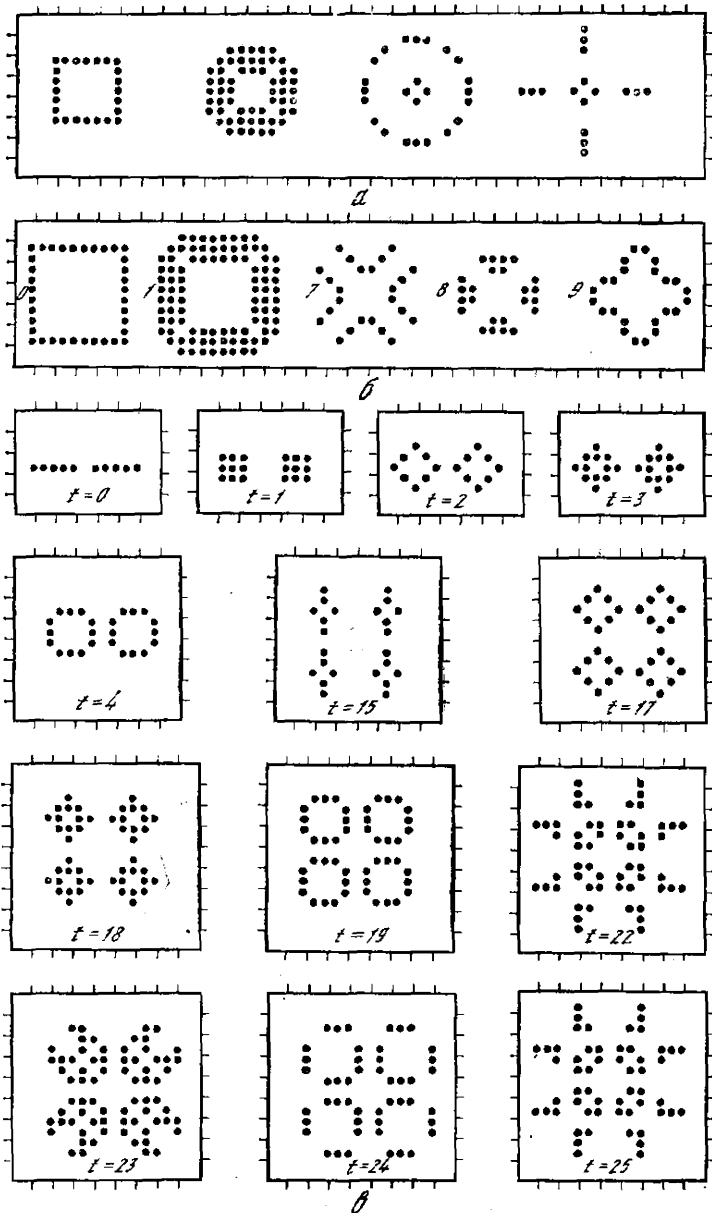


Рис. 8. Временная эволюция может приводить к выходу на циклы или стационары

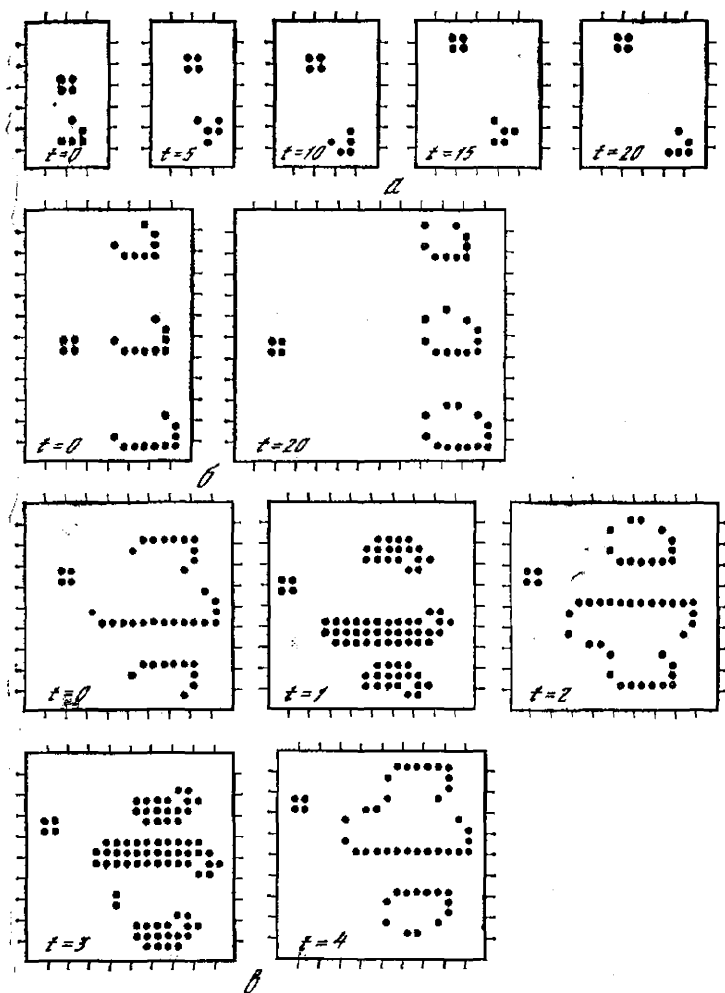


Рис. 9. Движущиеся структуры в игре «Жизнь»

вдоль любой диагонали клеток-квадратов в обоих направлениях). На рис. 9, а показаны четыре различные «фазы» планера.

Впрочем, некоторые конфигурации могут передвигаться не вдоль диагоналей, а по прямой. Таковы, например, три «корабля» на рис. 9, б (обратим внимание на то, что далеко не любая конфигурация такого типа будет

«кораблем»). Тем не менее исходя из них можно построить более сложные передвигающиеся сообщества, например «большой корабль» с сопровождением. Без сопровождения си передвигаться не может (рис. 9, в).

Рассматривая непрерывные среды, мы говорили о резонансном возбуждении начальных данных, приводящих к более сложной эволюции решений, чем в остальных случаях. В игре «Жизнь» есть аналог такого поведения. Обратим внимание на конфигурацию, показанную на рис. 10. Возникающие клетки занимают все большую часть плоскости, рождается несколько планеров (шаг 127), причем это сообщество будет развиваться дальше. Ни одна из других конфигураций, состоящих из пяти клеток, не приводит к такому сложному поведению.

Со времен Аристотеля ученых интересовал вопрос о направлении, о «цели» различных процессов в природе. Блестящим достижением стало открытие второго начала термодинамики — в замкнутых системах в соответствии с ним процессы идут в направлении роста энтропии и уменьшения упорядоченности.

Совершенно иначе дело обстоит в открытых нелинейных системах. В них могут существовать структуры, сложные колебательные процессы, хаотические режимы. Зачастую в одной и той же среде возникают качественно отличающиеся процессы, направление которых может быть различным. В определенных случаях его можно изменить очень малыми резонансными воздействиями на систему, которые согласованы с ее внутренними свойствами. Эта закономерность является общей для нелинейных сред и клеточных автоматов. Если учесть, что большинство окружающих нас систем, в частности биологических и экологических, нелинейны, становятся понятны надежды ученых, связанные с исследованием самоорганизаций, резонансными воздействиями.

Поразительно, что игра «Жизнь» с простейшими правилами позволяет иллюстрировать глубокие общие принципы.

Итак, мы располагаем планерами и различными кораблями. Интересно посмотреть, что же произойдет, когда они сталкиваются между собой или с различными стационарами. На рис. 11, а показано столкновение планера со структурой, называемой «крокодилом», или «пожирателем планеров». Крокодил проглатывает планер без всякого ущерба для себя. Столкновения могут быть очень разнообразны в зависимости от курса планера и его

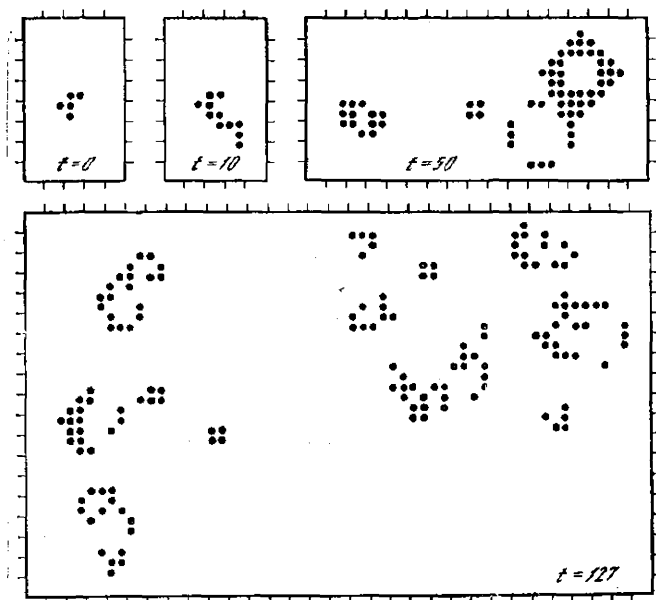


Рис. 10. Аналог резонансного возбуждения в игре «Жизнь»

фазы при столкновении. Если бы планер подлетел к крокодилу сзади, результат мог бы быть иным.

Столкновение двух планеров или планера со стационаром может приводить к их «аннигиляции» (см. рис. 11, б, в). В столкновениях может рождаться целый набор стационаров и «семафоров» (см. рис. 11, г). Обратим внимание на две закономерности. Если в конфигурации возникла симметрия (например, относительно вертикальной или горизонтальной оси), то далее в процессе эволюции она сохраняется (шаги 7, 8, 9). Если конфигурация все время локализована в квадрате размером $N \times N$, то она является набором стационаров и циклов, период которых не превышает 2^{N^2} . В самом деле, каждая клетка может находиться в одном из двух состояний, а всего клеток в области N^2 , поэтому при $t > 2^{N^2}$ конфигурации начнут повторяться.

Чем большую площадь занимает сообщество, тем сложнее оно может себя вести. Поэтому большой интерес вызывает неограниченно растущие в пространстве конфигурации. Одну из них, называемую «катапультой», или «планерным ружьем», предложил в 1970 г. Р. Госпер-

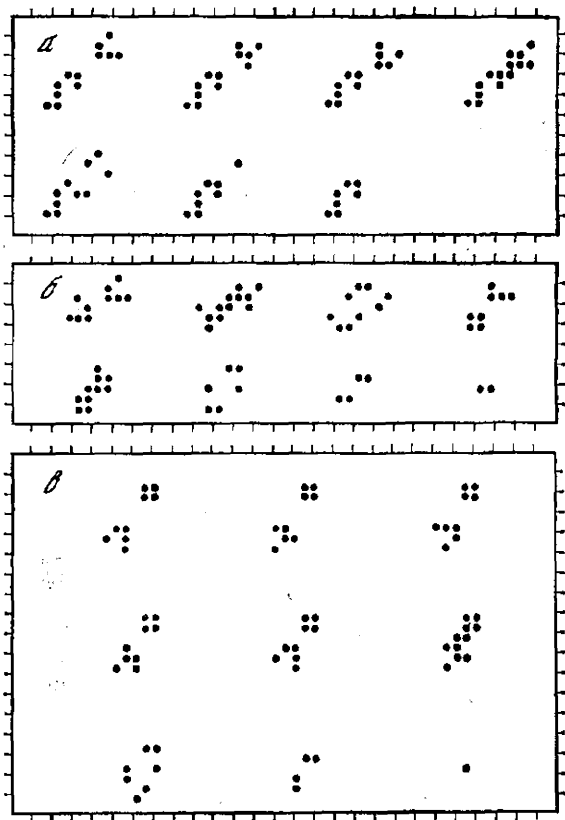
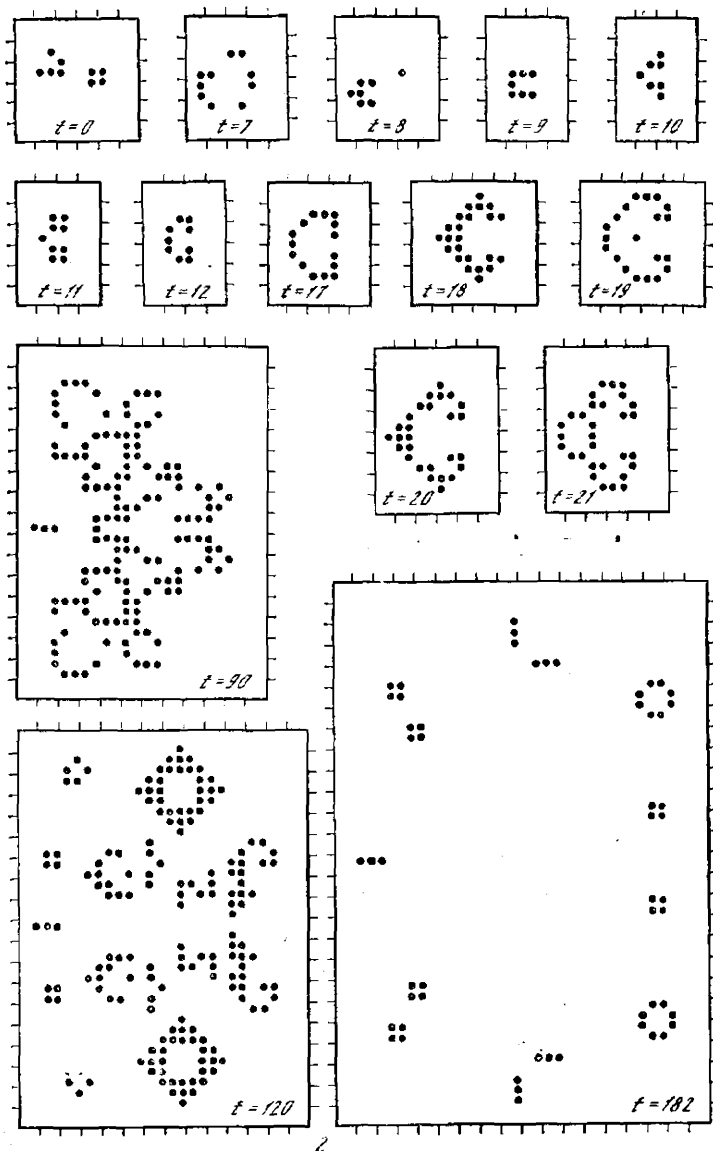


Рис. 11. Различные столкновения планеров

младший, будучи в то время студентом Массачусетского технологического института. Видно, что катапульта через каждые 30 шагов повторяет себя и выпускает планер (рис. 12, а). Планерное ружье заполняет пространство потоком планеров.

Есть еще более сложные сообщества клеток, которые могут двигаться, оставляя за собой большой набор семафоров и стационаров. Одно из них — «паровоз» (рис. 12, б). Найти такие интересные конфигурации нелегко, но, может быть, это удастся кому-либо из читателей.

События в игре «Жизнь» разворачиваются в двумерном пространстве. Вместе с тем интересные картины могут



2

Рис. 11 (окончание)

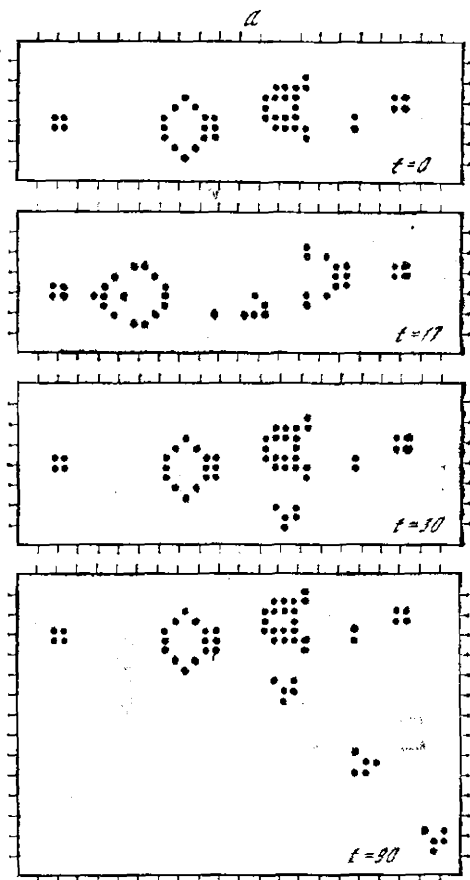


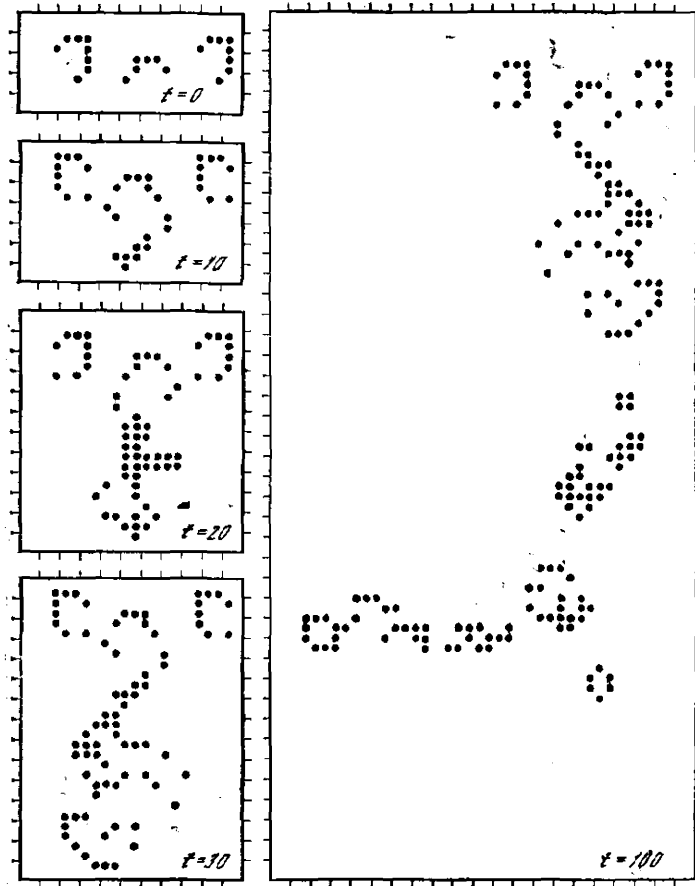
Рис. 12. Примеры конфигураций, неограниченно растущих в пространстве

разыгрываться и в одном измерении. Две из них показаны на рис. 13¹³.

Каждая строка соответствует одному моменту времени. Видно, что конфигурация повторяет себя на все больших

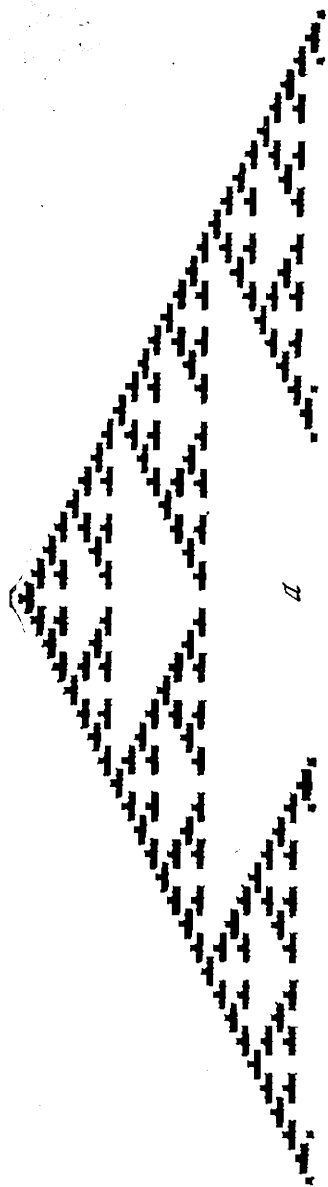
¹³ Эти клеточные автоматы были заданы следующими правилами. Определяется сумма значений пяти клеток (самой клетки и двух ближайших к ней слева и справа). На следующем шаге в зависимости от суммы, которая может быть равна 0, 1, 2, 3, 4, 5 клеткам присваивается значение 0, 1, 0, 0, 0, 0 (рис. 13, а) или 0, 1, 1, 1, 0, 0 (рис. 13, б). Можно посмотреть, что получится при других правилах. Это захватывающее зрелище.

б



пространственных масштабах. Здесь проявляется своеобразное «самоподобие» конфигурации на разных масштабах.

Почему игра «Жизнь» и простейшие одномерные игры такого типа сейчас очень интересуют ученых? Причин несколько. Во-первых, в некоторых задачах микробиологии, экологии и других областях приближение непрерывной среды неравномерно (слишком мало клеток или крупных растений участвуют во взаимодействии). Нужны дискретные модели. Во-вторых, можно ожидать, что разные типы структур, которые есть в «Жизни», рано или



a



b

Рис. 13. Эволюция кисточных автоматов

поздно встретятся нам при исследовании непрерывных сред.

Но это не главное. Сейчас для решения ряда важных задач требуются вычислительные машины с гигантским быстродействием (превышающим десятки миллиардов операций в секунду) и огромным объемом памяти. До сих пор ученые шли по пути уменьшения размеров ЭВМ. Это и понятно — чем меньше размеры, тем быстрее проходят сигналы между элементами компьютера. Понятно, что если эта тенденция сохранится, если элементы станут сравнимы с размерами отдельных молекул, то сами элементы и соединения между ними должны стать предельно простыми. Например, такими, как в игре «Жизнь», где связаны только ближайшие соседи, а каждая клетка может находиться только в двух состояниях.

Это не только аналогия. Можно рассмотреть все основные компоненты современной ЭВМ — блоки памяти, логические устройства и прочее — и показать, что все они могут быть с помощью определенных конфигураций смоделированы в игре «Жизнь»¹⁴ (решающим здесь является наличие потока планеров, создаваемых планерным ружьем, и существование столкновений, при которых исчезают оба планера).

Задавая различные начальные конфигурации, можно создавать самые разные компьютеры. В этой среде могут существовать все типы упорядоченности, которые можно моделировать с помощью ЭВМ.

Для повышения быстродействия вычислительных машин есть еще один путь. Можно разобраться, какие действия способны выполняться одновременно, параллельно, и поручить их разным компьютерам. Эта идея параллельных вычислений в ряде ЭВМ используется уже сейчас и, видимо, еще шире будет применяться в будущем. Одномерные и двумерные (как в игре «Жизнь») клеточные автоматы дадут прообраз таких параллельно работающих ЭВМ.

Ученые, изучая мозг человека, установили, что нервные клетки, нейроны, образуют сложную структуру, в которой каждый нейрон может быть соединен с несколькими десятками соседей. Системы, построенные на аналогичном принципе (они напоминают более сложный,

¹⁴ Подробней о таком компьютере рассказывается в книге: *Berlekamp E. R., Conway J. H., Guy R. K. Winning Ways for Your Mathematical Plays*, N. Y.: Academic Press, 1982.

многомерный аналог игры «Жизнь»), получили название нейронно-сетевых компьютеров. При решении ряда задач они имеют преимущества перед традиционными вычислительными машинами.

Вычислительная математика позволила по-новому взглянуть на связь дискретного и непрерывного в описании явлений природы, поставила глубокие вопросы, касающиеся мира дискретных систем. Возможно, ответы на них окажутся полезными при создании компьютеров будущих поколений.

Трудно предсказывать тенденции развития областей информатики, связанных с естествознанием, даже на ближайшие десятилетия. Новые проблемы, методы, идеи, быстрый рост возможностей вычислительной техники могут изменить приоритеты различных научных направлений. В этой связи интересна мысль о будущем науки, высказанная в начале века Анри Пуанкаре: «Мы все уверены, что развитие математики будет продолжаться; весь вопрос в том, в каком именно направлении. Мне могут ответить: „во всех направлениях“, — и это будет отчасти справедливо; но если бы это было верно вполне, то это нас несколько устрасило бы. Быстро возрастая, наши богатства вскоре образовали бы нечто столь громоздкое, что мы оказались бы перед этой непостижимой грудой не в лучшем положении, чем были раньше перед неизвестной нам истиной».

Огромное множество частных результатов не может заменить обобщающих идей, перехода на новый более глубокий уровень понимания явлений природы.

Вопрос о выборе основных направлений развития науки сейчас стоит еще более остро, чем во времена Пуанкаре. На решение многих крупных проблем ученым сегодня отпущено ограниченное время, да и речь идет порой о работе больших научных коллективов. Все чаще приходится выбирать один из многих путей.

В последние годы были получены впечатляющие результаты в исследовании нелинейных явлений средствами вычислительного эксперимента, обнаружены законы организации структур в различных нелинейных средах. Не менее важна и постановка многих глубоких содержательных вопросов, выявление связи этих проблем с различными областями науки и техники. Это дает основание считать, что роль многих направлений, связанных с исследованием структур в нелинейных средах, будет возрастать.

ЛИТЕРАТУРА

1. Самарский А. А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1977. 656 с.
2. Самарский А. А. Введение в численные методы. М.: Наука, 1987. 286 с.
3. Курдюмов С. П. Собственные функции горения нелинейной среды и конструктивные законы построения ее организации // Современные проблемы математической физики и вычислительной математики. М.: Наука, 1982. С. 247—243.
4. Итоги науки и техники: Современные проблемы математики: Новейшие достижения. М.: ВИНТИ, 1987. Т. 28.
5. Соболев И. М. Метод Монте-Карло. М.: Наука, 1985. 64 с.
6. Самарский А. А. и др. Нелинейные явления и вычислительный эксперимент // Вестн. АН СССР. 1985. № 9. С. 64—77.
7. Самарский А. А. и др. Тепловые структуры и фундаментальная длина в среде с нелинейной теплопроводностью и объемным источником тепла // Докл. АН СССР. 1976. Т. 227. № 2. С. 321—324.
8. Курдюмов С. П. и др. Диссипативные структуры в триггерных средах // Дифференциальные уравнения. 1981. Т. 17, № 10. С. 1875—1885.
9. Хакен Г. Синергетика. М.: Мир, 1980. 404 с.
10. Николис Г., Пригожин И. Самоорганизация в неравновесных системах. М.: Мир, 1979. 512 с.
11. Змитренко Н. В., Михайлов А. П. Инерция тепла. М.: Знание, 1982. 63 с.
12. Курдюмов С. П., Малинецкий Г. Г. Синергетика — теория самоорганизации. М.: Знание, 1983. 63 с.

ПАРАДОКСЫ МИРА НЕСТАЦИОНАРНЫХ СТРУКТУР

Т. С. АХРОМЕЕВА, С. П. КУРДЮМОВ, Г. Г. МАЛИНЕЦКИЙ

1. КОМПЬЮТЕРЫ, МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ, НЕЛИНЕЙНЫЕ ЯВЛЕНИЯ

Одним из главных факторов, которые должны определять развитие точных наук и их технических приложений в ближайшее десятилетие, будет применение современной машинной математики, детища науки и техники. Возникновение этой новой могучей методики следует считать самым крупным событием во всей новейшей истории математики, если только сами математики захотят признать вычислительные машины своим детищем.

Л. А. Арцимович

Создатели первых электронно-вычислительных машин мечтали о возможности решать сложные гидродинамические задачи, предсказывать погоду, с высокой точностью вести инженерные расчеты. Многие из этого сегодня стало реальностью, многое, видимо, будет осуществлено в ближайшем будущем. Оказалось, однако, что машина не только служит гигантским арифмометром. Она может помочь более глубоко понять окружающий нас мир, создать новые теории и представления. О некоторых новых понятиях и идеях, в становлении которых существенную роль сыграла ЭВМ, мы и хотим рассказать в этой статье.

Двадцать пять лет назад Норберт Винер, характеризуя возможности компьютеров, сказал, что любая машина полезна ровно настолько, насколько глубокие и продуманные задачи мы перед ней ставим. Человек должен иметь идеи, и тогда машина ускорит их проверку и воплощение. Другими словами, необходимым условием успеха является хорошая *математическая модель* изучаемого явления.

Чем же отличаются модели, используемые в классической науке, от тех, которые стали доступны ученым с появлением ЭВМ? Пожалуй, главное заключается в том, что машины помогают в изучении *нелинейных математических моделей*.

Сложности исследования связаны с тем, что мир нелинейных явлений, для описания которых и нужны такие модели, гораздо богаче «линейного мира». Есть мно-

то важных нелинейных уравнений, которые необходимо изучить. Причем большинство уравнений не может быть решено аналитически. Их анализ обычно требует сочетания современных аналитических методов с большими сериями расчетов на ЭВМ. Такое сочетание все чаще называют *вычислительным экспериментом*. «Вычислительный эксперимент предназначен для изучения, прогнозирования, оптимизации сложных многопараметрических нелинейных процессов, теоретическое и экспериментальное исследование которых традиционными методами затруднено или невозможно»¹.

Пожалуй, одной из первых и наиболее известных задач, в которой стали видны огромные возможности вычислительных машин в исследовании нелинейных явлений, явилось изучение уравнения Кортевега—де Вриза. Расскажем подробнее об этом замечательном уравнении.

Школьный курс физики знакомит с понятием модели идеального газа. Представляя молекулы газа как упругие шарики, беспорядочно сталкивающиеся между собой, можно довольно много сказать о свойствах вещества. Это очень интересный факт — из свойств отдельной частицы следуют свойства целого. В частности, идеальный газ устроен так, что если мы поместим в него некоторую часть очень быстрых молекул, то со временем средние скорости выравниваются, и каждая из молекул будет обладать средней энергией $3\bar{\epsilon}T/2$, где $\bar{\epsilon}$ — постоянная Больцмана; T — температура газа. Каждая из молекул может двигаться в одном из трех направлений, т. е. обладает тремя степенями свободы. Значит, на каждую степень свободы приходится энергия $\bar{\epsilon}T/2$.

Все основные характеристики газа можно посчитать двумя способами. Например, температуру можно вычислить, если следить за кинетической энергией одной частицы и взять среднее по времени от этой величины. Но можно сделать и по-другому — взять среднюю энергию, приходящуюся на каждую частицу в данный момент времени. Оказывается, что среднее по времени для одной частицы и среднее в один момент для всех частиц во многих случаях совпадают. Это свойство получило название *эргодичности*.

В начале нашего века внимание многих ученых было привлечено к задачам физики твердого тела. Их интере-

¹ Самарский А. А. Современная прикладная математика и вычислительный эксперимент // Коммунист, 1983. № 18. С. 31—42.

совало, можно ли предсказывать теплоемкость твердых тел, их коэффициенты теплопроводности на основе таких же простых представлений об отдельной молекуле, как в кинетической теории газов. Представим простейшую модель кристалла — цепочку одинаковых грузиков массы m , соединенных одинаковыми пружинками с жесткостью k (рис. 1). Обозначим через y_n отклонение грузика с но-

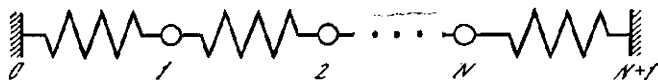


Рис. 1. Цепочка грузиков, соединенных пружинками

мером n от состояния равновесия. Тогда второй закон Ньютона дает нам уравнение движения этого грузика

$$m \frac{d^2 y_n}{dt^2} = k(y_{n+1} - y_n) - k(y_n - y_{n-1}). \quad (1.1)$$

В правой части этого уравнения стоят силы, действующие на шарик со стороны левой и правой пружинок. Следуя закону Гука, мы полагаем, что они пропорциональны удлинениям пружин. Записывая уравнения вида (1.1) для $n = 1, 2, \dots, N$ и считая $y(0) = 0$, $y(N+1) = 0$, мы получим систему уравнений, описывающую простейшую модель решетки. Несмотря на свою простоту, она оказывается очень полезной².

Каковы же возможные движения такой системы, каковы ее степени свободы? Когда грузиков много, а пружинки короткие, то уравнения (1.1) становятся близки к одному уравнению в частных производных, которое описывает движение струны с закрепленными концами. В струне возможны различные виды стоячих волн (рис. 2). По аналогии с ними можно нарисовать различные решения уравнения (1.1). Они описываются формулами

$$y_n = \sin(\omega_p t) \sin[\pi p n / (N + 1)], \quad (1.2)$$

где $p = 1, 2, \dots, N$, $\omega_p^2 = \frac{4k}{m} \sin^2[\pi p / (2N + 2)]$. Подставив формулы (1.2) в уравнения (1.1), можно непосредственно убедиться, что это решения. Решения такого вида физики часто называют модами, или гармониками, мы также будем пользоваться этими терминами.

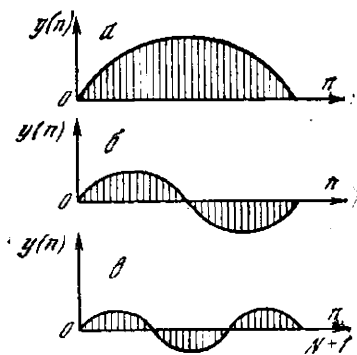
² Мы всегда будем считать, что начальные скорости грузиков равны нулю.

Рис. 2. Простейшие типы стоячих волн в струне с закрепленными концами

Величины $y(n)$ можно рассматривать и как функции, входящие в уравнение (1.1)

Можно ввести новые переменные:

$$\begin{aligned}
 a_i(t) &= \\
 &= 2 \sum_{n=1}^N y_n(t) \frac{\sin[\pi n/(N+1)]}{N+1}, \\
 i &= 1, 2, \dots, N,
 \end{aligned} \tag{1.3}$$



которые упрощают уравнения (1.1). В этих переменных они выглядят так:

$$d^2 a_i / dt^2 + \omega_i^2 a_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N, \tag{1.4}$$

где ω_i дается формулой (1.2). Из соотношений (1.4) видно, что каждая величина $a_i(t)$ меняется независимо от $a_j(t)$ при $i \neq j$. Отсюда следует, например, что если в начальный момент $y_n(0)$ были такими, как показано на рис. 2, a , то при этом $a_2(t) = \dots = a_N(t) = 0$ и $a_1(t) = \cos(\omega_1 t)$. Именно величины $a_i(t)$ (их мы будем далее называть амплитудами гармоник) характеризуют степени свободы в этой задаче.

Мы выяснили, что если в начальный момент времени $a_p(0) = 1, a_j(0) = 0$ при $p \neq j$, то $a_j(t)$ останутся равными нулю во все последующие моменты времени. Такое решение описывает простейшую упорядоченность в нашей системе, при которой все шарики синхронно колеблются по закону

$$y_n(t) = \cos \left[2 \sqrt{\frac{k}{m}} \sin \left(\frac{\pi p}{2N+2} \right) t \right] \sin \left(\frac{\pi n p}{N+1} \right).$$

Однако в реальном кристалле всякое упорядоченное движение с течением времени переходит в хаотические, тепловые колебания атомов.

С этим противоречием столкнулся в 1914 г. голландский физик Дебай при создании теории неэлектропроводного кристалла. Он предположил, что здесь существенна нелинейность. По-видимому, нельзя считать, что пружинки описываются законом Гука, нужно учитывать нелинейные члены. Создание квантовой механики, а с ней и кван-

товой теории твердого тела отодвинуло на второй план проверку гипотезы Дебая.

Тем более показательно, что проверкой этой гипотезы занялся в 1954 г. один из создателей квантовой механики итальянский физик Энрико Ферми. О его блестящей интуиции и глубоком понимании теоретической физики и сейчас напоминают многие названия: поверхность Ферми в теории твердого тела, ферми-частицы или фермионы в квантовой статистике; фермием назван один из последних элементов периодической системы. В 50-е годы Ферми часто говорил коллегам, что в будущем фундаментальные физические теории, возможно, будут включать нелинейные уравнения. При этом важная роль, по его мнению, должна будет принадлежать математике, необходимой для понимания нелинейных систем.

Ферми со своими коллегами Дж. Пастой и С. Уламом предположили, что сила, с которой действует пружинка $F(y_n, y_{n+1}) = k(y_{n+1} - y_n) + k\alpha(y_{n+1} - y_n)^3$. Это дает вместо (1.1) следующую систему уравнений:

$$m \frac{d^2 y_n}{dt^2} = k(y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}) + k\alpha[(y_{n+1} - y_n)^3 - (y_n - y_{n-1})^3], \quad n = 1, 2, 3, \dots, N. \quad (1.5)$$

Иногда эту систему называют кубической решеткой.

Расчеты проводились с помощью одной из первых вычислительных машин. Решалась система 64 дифференциальных уравнений (в формуле (1.5) N было равно 64). Решение этой задачи также можно разложить по гармоникам, т. е. найти величины $a_j(t)$ по формуле (1.3). Но в силу нелинейности $d^2 a_j / dt^2$ зависит от поведения всех a_j , $j = 1, \dots, N$, и вместо (1.4) получаются довольно сложные соотношения. Исследователи полагали $a_1(0) \neq 0$, $a_2(0) = a_3(0) = \dots = a_N(0) = 0$ и ожидали, что довольно быстро энергия распределится поровну между всеми a_j в соответствии с гипотезой Дебая.

Однако увидели они совершенно другую картину. «Здесь можно сказать, что результаты наших расчетов обнаруживают особенности, которые с самого начала представлялись нам удивительными», — писали авторы работы. Действительно, вначале энергия перераспределяется между всеми N модами, но через некоторое время система практически возвращается в начальное состояние. Ученые не увидели, что энергия стремится к равномерному распределению по степеням свободы. Статья Ферми, Пасты и Улама, где были описаны результаты расчетов

и наблюдаемый возврат в состояние, близкое к начальному, привлекла внимание физиков и математиков.

Анализ этой задачи помог в создании нескольких математических теорий. Одна из них связана с именами американских математиков М. Крускала и Н. Забуского. Они предположили, что явление «почти возвращения» и детальное поведение всех гармоник могут быть объяснены на основе непрерывной модели. В самом деле, кажется естественным, что при увеличении N можно перейти от набора функций $y_n(t)$, $n = 0, 1, \dots, N$, к одной непрерывной функции двух переменных $y(x, t)$ так, чтобы $y[nL/(N+1), t] \approx y_n(t)$, где L — длина решетки. При этом вместо системы обыкновенных дифференциальных уравнений (1.5) мы получим уравнение в частных производных для функции $y(x, t)$. Оказалось, что распространение волн небольшой амплитуды по кубической решетке описывается уравнением

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = 0. \quad (1.6)$$

Связь между функциями u и y довольно сложная, поэтому мы ее не приводим. О свойствах этого замечательного уравнения, которое называют уравнением Кортевега—де Вриза, мы подробно поговорим ниже. Важно отметить, что уравнение (1.6) очень хорошо описывает поведение кубической решетки. Однако малые поправки при «возвращении» у них различны. В уравнении (1.6) исходное состояние повторяется полностью, а в решетке приближенно. Поэтому можно ожидать, что в конце концов в задаче (1.5) энергия все же будет распределяться поровну между модами. Вместе с тем в очень близких системах вида (1.6) может наблюдаться точное повторение начальных данных.

Уравнение (1.6) было выведено в конце прошлого века Дидериком Йоганном Кортевегом и его учеником Густавом де Вризом. Кортевег заведовал кафедрой математики и механики в Амстердамском университете. Его научные интересы были связаны с гидродинамикой. Вместе с де Вризом они исследовали задачу о распространении волн на воде и получили уравнение

$$y_t + c_0(y_x + 3/2d^{-1}yy_x + 1/6d^2y_{xxx}) = 0, \quad (1.7)$$

где x — расстояние по горизонтали от начала координат; t — время; y — смещение поверхности жидкости от равновесного уровня; d — глубина жидкости; $c_0 = (gd)^{1/2}$ — скорость волн с малой амплитудой (рис. 3). Несложные

замены переменных приводят уравнение (1.7) к виду (1.6).

Работа, в которой было выписано это уравнение и приведены его простейшие решения, была опубликована в 1895 г. и надолго забыта. В биографии Кортвега, вышедшей в 1946 г., эта работа даже не упоминалась — ни в тексте, ни в списке научных трудов. Сейчас почти нет

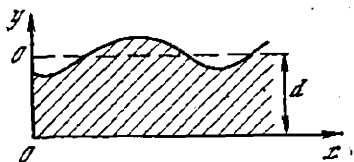


Рис. 3. Величина y характеризует отклонение жидкости от равновесия

книг по гидродинамике и теории нелинейных волн, где бы не упоминалась замечательная работа Кортвега и де Вриза. Ее вторая жизнь началась в 70-е годы. В это время было понято, как писал Крускал, что Кортвег и де Вриз предложили «по-видимому, простейшее дифференциальное уравнение в частных производных, ... но охватываемое классическими методами».

Поговорим о нем подробнее. Допустим, что у нас есть возможность посчитать с помощью ЭВМ различные решения интересующих нас уравнений. Уравнение в частных производных имеет много решений. И чтобы выбрать одно из них, нужно знать, какой была функция u в начальный момент, т. е. знать $u(x, 0)$. Эту функцию называют *начальными условиями*, или *начальными данными*. Будем для простоты считать, что нас интересует решение на всей прямой ($-\infty < x < \infty$).

Эволюция одного из решений показана на рис. 4. Картина оказывается очень интересной. Вначале функция u становится немонотонной, а потом распадается на систему уединенных волн, каждая из которых распространяется с постоянной скоростью, сохраняя свою форму. Такие локализованные волны, сохраняющие свою структуру или форму, получили название солитонов.

Каждый из солитонов представляет собой волну, бегущую со скоростью c , и описывается формулой

$$u(x, t) = u_0 \operatorname{ch}^{-2} [(x - ct)/\Delta], \quad u_0 = \text{const}, \quad \operatorname{ch} z \equiv \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad (1.8)$$

где $c = u_0/3$; $\Delta = (12/u_0)^{1/2}$. Из этой формулы следует, что чем быстрее движется солитон, тем он выше и уже. Поскольку скорости волн различны, то один солитон мо-

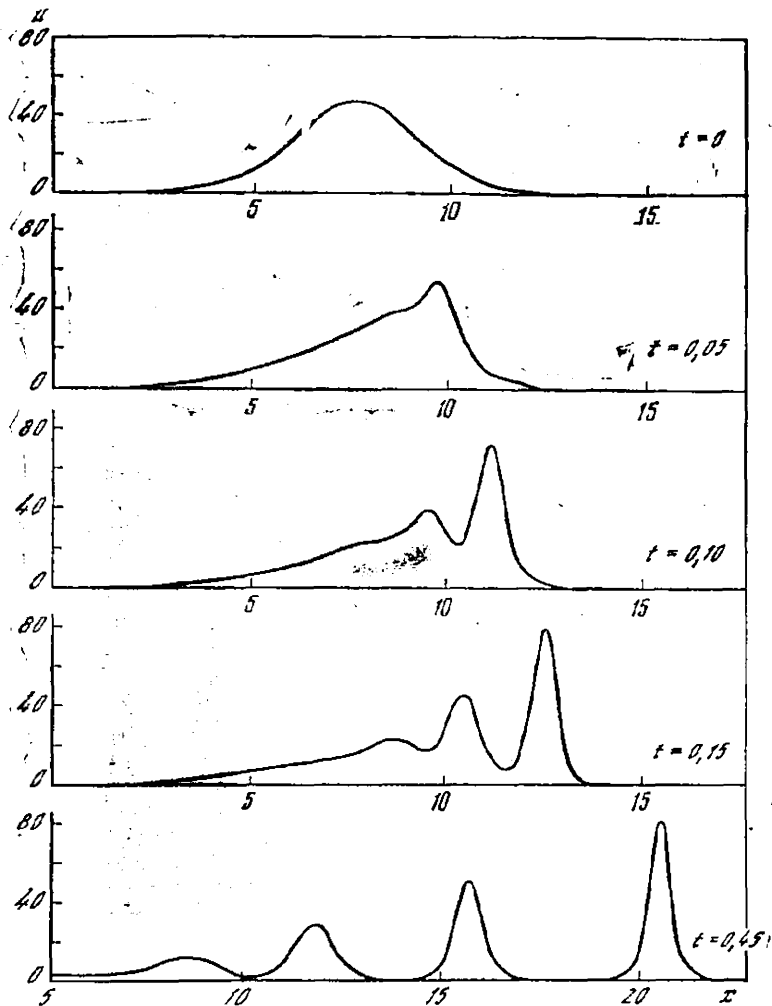


Рис. 4. Решение уравнения Кортевега—де Вриза на различные моменты времени

Происходит распад начального профиля на последовательность уединенных волн; чем больше амплитуда волны, тем быстрее она движется

жет догнать другой. Пример расчета, в котором происходит этот процесс, показан на рис. 5. Картина представляется поразительной. Несмотря на то, что уравнение нелинейно, солитоны «проходят» друг через друга, не меняя ни формы, ни скорости, ни амплитуды.

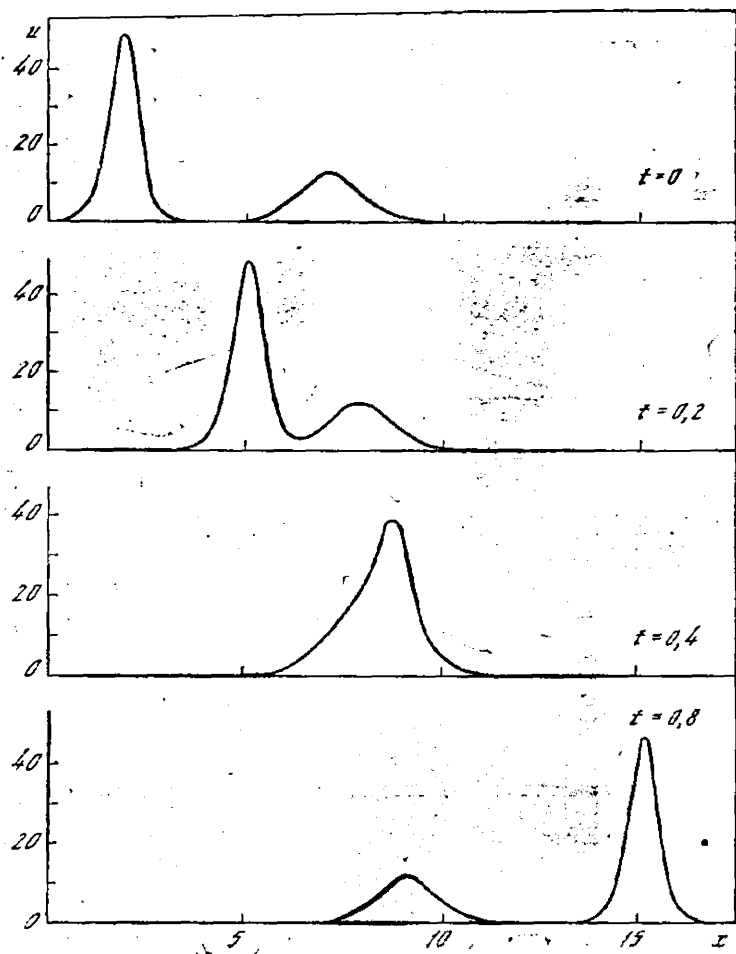


рис. 5. Функция $u(x, t)$ в различные моменты времени
 более быстрый и высокий солитон догонит широкий и медленный. После взаимодействия оба солитона сохраняют амплитуду, форму и скорость

Результаты расчетов, в которых исследовалось взаимодействие солитонов, привели ученых к мысли изучить законы сохранения в этой системе. Оказалось, что сохраняется величина u (т. е. остается постоянным $\int_{-\infty}^{\infty} u dx$), величина $u^2/2$, величина $u^3/3 - u_x^2$ и . . . еще бесконечно много величин.

Этот факт является отражением глубоких внутренних закономерностей. Их исследование привело к созданию в 1967 г. К. Гардиером, Дж. Грином, М. Крускалом, Р. Миурой нового метода решения таких задач — метода обратной задачи теории рассеяния, который позволил свести изучение задачи (1.6) к решению некоторого линейного уравнения. Оказалось, что много важных и интересных нелинейных уравнений имеют бесконечно много законов сохранения и могут быть решены этим способом. Солитон стал новым понятием во многих прикладных дисциплинах.

Характеризуя важную роль ЭВМ в исследовании солитонов, один из его активных участников М. Забуски выделил несколько этапов: первый этап (до 1964 г.) — главную роль играет численное моделирование; второй этап — период наиболее активного исследования уравнения Кортевега—де Вриза (1965—1971 гг.); третий этап (с 1972 г. по настоящее время) — появляются обобщения и приложения этой задачи, компьютер играет необходимую поддерживающую роль. При этом достигается «ускорение и углубление математического понимания, ставшее возможным благодаря сочетанию анализа и численного моделирования».

Вероятно, у читателя возник вопрос, какие же приложения могут иметь исследования солитонов. Одним из наиболее перспективных видов связи сейчас считается оптическая связь. Пара оптических волокон, образующих междугородний канал речевой связи, может пропускать 90 млн бит/с, что соответствует примерно 1400 телефонным переговорам. Однако волоконно-оптическая связь обладает несколькими существенными недостатками. Они объясняются оптическими и физическими параметрами оптического импульса. (Наличие или отсутствие импульса в течение короткого интервала приема и соответствует одному биту информации.) В обычных условиях импульс «размывается». В нем можно выделить составляющие с разной частотой и амплитудой, которые распространяются с разной скоростью, что и приводит к «размыванию». Это накладывает жесткие ограничения на скорость передачи информации.

Исследования сотрудников фирмы «Белл» показывают, что преодолеть этот недостаток позволяет использование нелинейных эффектов. Уравнения, описывающие прохождение импульсов по волокну, близки к тем, в которых возможны солитоны. Если начальная энергия и форма

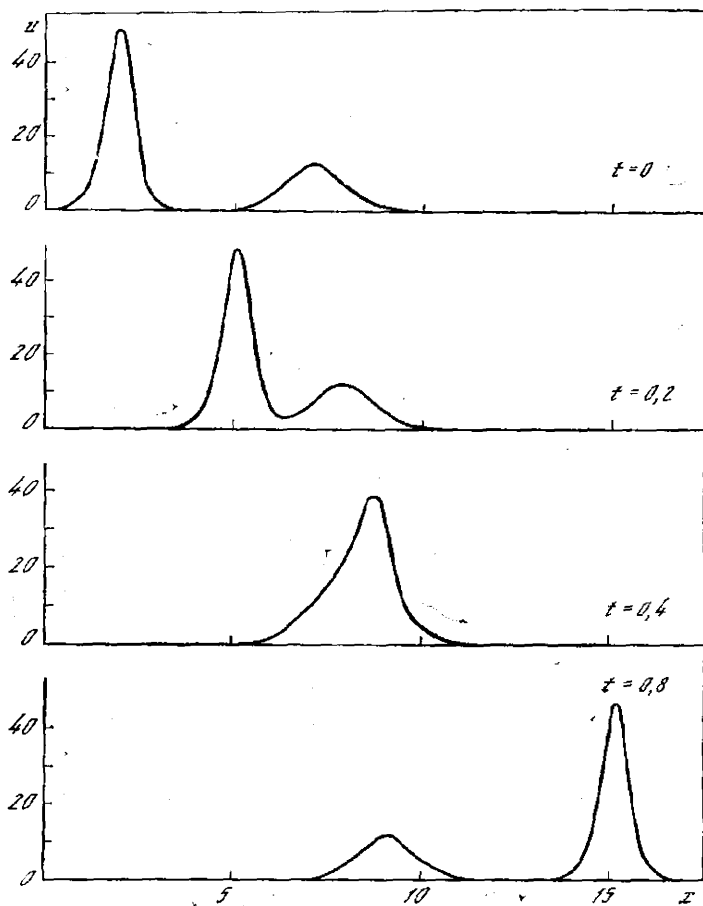


Рис. 5. Функция $u(x, t)$ в различные моменты времени
 Более быстрый и высокий солитон догоняет широкий и медленный. После взаимодействия оба солитона сохраняют амплитуду, форму и скорость

Результаты расчетов, в которых исследовалось взаимодействие солитонов, привели ученых к мысли изучить законы сохранения в этой системе. Оказалось, что сохраняется величина u (т. е. остается постоянным $\int_{-\infty}^{\infty} u dx$), величина $u^2/2$, величина $u^3/3 - u_x^2$ и . . . еще бесконечно много величин.

Этот факт является отражением глубоких внутренних закономерностей. Их исследование привело к созданию в 1967 г. К. Гарднером, Дж. Грином, М. Крускалом, Р. Миурой нового метода решения таких задач — метода обратной задачи теории рассеяния, который позволил свести изучение задачи (1.6) к решению некоторого линейного уравнения. Оказалось, что много важных и интересных нелинейных уравнений имеют бесконечно много законов сохранения и могут быть решены этим способом. Солитон стал новым понятием во многих прикладных дисциплинах.

Характеризуя важную роль ЭВМ в исследовании солитонов, один из его активных участников М. Забуски выделил несколько этапов: первый этап (до 1964 г.) — главную роль играет численное моделирование; второй этап — период наиболее активного исследования уравнения Кортевега—де Вриза (1965—1971 гг.); третий этап (с 1972 г. по настоящее время) — появляются обобщения и приложения этой задачи, компьютер играет необходимую поддерживающую роль. При этом достигается «ускорение и углубление математического понимания, ставшее возможным благодаря сочетанию анализа и численного моделирования».

Вероятно, у читателя возник вопрос, какие же приложения могут иметь исследования солитонов. Одним из наиболее перспективных видов связи сейчас считается оптическая связь. Пара оптических волокон, образующих междугородний канал речевой связи, может пропускать 90 млн бит/с, что соответствует примерно 1400 телефонным переговорам. Однако волоконно-оптическая связь обладает несколькими существенными недостатками. Они объясняются оптическими и физическими параметрами оптического импульса. (Наличие или отсутствие импульса в течение короткого интервала приема и соответствует одному биту информации.) В обычных условиях импульс «размывается». В нем можно выделить составляющие с разной частотой и амплитудой, которые распространяются с разной скоростью, что и приводит к «размыванию». Это накладывает жесткие ограничения на скорость передачи информации.

Исследования сотрудников фирмы «Белл» показывают, что преодолеть этот недостаток позволяет использование нелинейных эффектов. Уравнения, описывающие прохождение импульсов по волокну, близки к тем, в которых возможны солитоны. Если начальная энергия и форма

импульса соответствуют солитону, то такой импульс устойчив к «размыванию». Специалисты считают, что «солитоны идеально удовлетворяют условиям оптической связи. Можно сформировать весьма короткие солитонные импульсы и таким образом обеспечить очень высокую скорость передачи информации»³. Полагают, что использование этого и других нелинейных эффектов позволит довести скорость передачи информации до величин порядка 10—100 млрд бит/с.

2. БИФУРКАЦИИ, ДИССИПАТИВНЫЕ СТРУКТУРЫ, САМООРГАНИЗАЦИЯ

Новые идеи придумывать очень трудно. Для этого требуется совершенно исключительное воображение

Р. Фейнман

Большое разнообразие и сложность нелинейных задач приводят к мысли выделить простейшие элементы и понятия, которые встречаются достаточно часто. Одним из таких понятий в теории нелинейных уравнений является представление о бифуркации решений, которое мы поясним на классическом примере.

Представим себе колонну прямоугольного сечения, на которую сверху действует нагрузка P (рис. 6). Будем увеличивать нагрузку и посмотрим, что произойдет. Вначале колонна будет укорачиваться и утолщаться, но ее центральная линия будет оставаться прямой. Однако при некотором критическом значении P_c картина качественно изменится — колонна потеряет прямолинейную форму и прогнется вправо или влево. При $P < P_c$ у колонны есть единственная равновесная форма. При $P > P_c$ их три: прямолинейная форма, которая стала неустойчивой, и две устойчивые — одна соответствует прогибу вправо, другая — влево. Если мы нарисуем зависимость отклонения A оси колонны от прямой от величины нагрузки P , то картина будет такой, как показано на рис. 7. При $P = P_c$ изменилось число состояний равновесия и их устойчивость. Изменение числа и устойчивости решений уравнения называется *ветвлением*, или *бифуркацией* решений. Это типично нелинейное явление. Классическая линейная теория упругости дает единственное прямолинейное состояние равновесия.

³ Оптическая связь — миллиарды бит в секунду // В мире науки, 1984. № 4. С. 67—68.

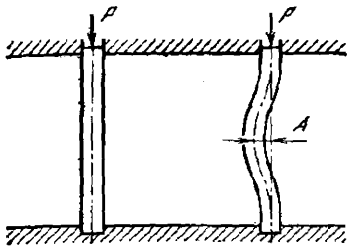


Рис. 6. Изгиб колонны под действием нагрузки

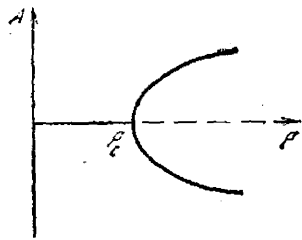


Рис. 7. Зависимость отклонения от величины нагрузки

Задачей о потере устойчивости колонны занимались Эйлер, Бернулли, Лагранж. Одним из первых термин бифуркация ввел К. Якоби в 1834 г. Однако в полной мере значение теории бифуркаций было осознано выдающимся французским математиком Анри Пуанкаре в конце прошлого века.

В элементарной математике обычно для любой интересующей нас величины мы получаем некоторую формулу, куда остается подставить соответствующие числа. В прошлом веке появился широкий круг задач, где оказались полезны линейные уравнения. Во многих случаях их решение также удастся выразить в явном виде через специальные функции. Можно выяснить также, как зависит это решение от параметров уравнения. Простейшими специальными функциями являются тригонометрические функции ($\sin x$, $\operatorname{tg} x$ и т. д.). Есть и более сложные — полиномы Эрмита, Лагера, функции Бесселя, Ханкеля, эллиптические функции и многие, многие другие. Задачей теоретика было свести получившееся у него уравнение к какому-нибудь известному виду. Математики же исследовали различные линейные уравнения и вводили новые специальные функции.

Однако в нелинейных задачах, которых становилось все больше, так действовать было нельзя — явное выражение для решения получить обычно не удавалось. Нужен был другой подход. Пусть нам известно решение задачи при значении параметра $\lambda = \lambda_0$, тогда можно попробовать найти решение и при $\lambda_0 + \Delta\lambda$, где $\Delta\lambda$ — малое число. При этом наш анализ становится локальным — вместо поиска общего решения мы ограничиваемся тем, что происходит с конкретным решением в окрестности одного

значения параметра. Естественно в первую очередь выбрать наиболее важные значения параметра, где поведение системы качественно меняется, т. е. точки бифуркации. При этом важнейшей целью становится выяснение всех основных типов бифуркаций в различных задачах. А. Пуанкаре полагал, что решение этой большой и сложной проблемы поможет в исследовании многих конкретных нелинейных явлений. Успехи, достигнутые уже в нашем веке в прикладной математике, теории колебаний и в других областях, показали важность и большие перспективы этого направления. Значение программы исследований, предложенной Пуанкаре, оказалось очень велико.

Основные типы бифуркаций мы рассмотрим на следующем примере. Пусть у нас есть химическая реакция, в которой изменение концентрации интересующего нас продукта dx/dt зависит от самой концентрации x и внешних воздействий, характеризующихся параметром λ . Это дает обыкновенное дифференциальное уравнение

$$dx/dt = F(x, \lambda). \quad (2.1)$$

Решения этого уравнения ведут себя очень просто. На достаточно больших временах $x(t)$ стремится к постоянному значению \bar{x} . Иногда говорят, что \bar{x} является *асимптотикой* решения $x(t)$. (В некоторых случаях решения этого уравнения могут возрастать или убывать до бесконечности, однако этот случай мы рассматривать не будем⁴.)

Таких значений \bar{x} может быть несколько \bar{x}_1, \bar{x}_2 и т. д. Понятно, что при этом

$$F(\bar{x}, \lambda) = 0. \quad (2.2)$$

В зависимости от начальных данных $x(0)$ решение стремится к одному из \bar{x}_n . Поэтому осталось решить уравнение (2.2) и найти все его корни как функции параметра λ . Для простейших функций $F(x, \lambda)$, например полиномов второй или третьей степени по x , все корни можно найти по явным формулам. Для более сложных зависимостей

⁴ В некоторых задачах неограниченно растущие решения (так называемые режимы с обострением) представляют большой интерес. О некоторых из них рассказано в сборнике: Компьютеры, модели, вычислительный эксперимент. М.: Наука, 1988.

$F(x, \lambda)$ сделать это не удается. Здесь можно поступить иначе.

Допустим, что нам известно какое-либо одно решение уравнения (2.2). Для того чтобы найти решение при близком значении $\lambda = \lambda_0 + \Delta\lambda$, $\Delta\lambda \ll 1$, можно воспользоваться формулой Тейлора⁵

$$F(\bar{x} + \Delta x, \lambda_0 + \Delta\lambda) = F(\bar{x}, \lambda_0) + \frac{\partial F(\bar{x}, \lambda_0)}{\partial x} \Delta x + \\ + \frac{\partial F(\bar{x}, \lambda_0)}{\partial \lambda} \Delta\lambda + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 F(\bar{x}, \lambda_0)}{\partial x^2} (\Delta x)^2 + \right. \\ \left. + 2 \frac{\partial^2 F(\bar{x}, \lambda_0)}{\partial x \partial \lambda} \Delta x \Delta\lambda + \frac{\partial^2 F(\bar{x}, \lambda_0)}{\partial \lambda^2} (\Delta\lambda)^2 \right] + G, \quad (2.3)$$

где G — остаток ряда, в который входят члены, пропорциональные $(\Delta x)^3$, $(\Delta x)^2 \Delta\lambda$, $\Delta x (\Delta\lambda)^2$, $(\Delta\lambda)^3$ и т. д., его конкретный вид для нас не важен. Поскольку нас интересуют состояния равновесия, то $F(\bar{x} + \Delta x, \lambda_0 + \Delta\lambda) = 0$. Но тогда мы получаем при $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta\lambda \rightarrow 0$:

$$\Delta x = - \frac{\partial F(\bar{x}, \lambda_0)}{\partial \lambda} \Delta\lambda / \frac{\partial F(\bar{x}, \lambda_0)}{\partial x}. \quad (2.4)$$

Это очень полезная формула. Из нее следует, что если $\partial F(\bar{x}, \lambda_0)/\partial x$ отлично от нуля, то мы можем приближенно определить новое состояние равновесия (рис. 8). Такое состояние, судя по формуле (2.3), будет одно, а значит, в точке λ_0 , \bar{x} не происходит бифуркации.

Но может случиться так, что $\partial F(\bar{x}, \lambda_0)/\partial x = 0$, и тогда нужно учитывать следующие слагаемые. Если $\partial^2 F(\bar{x}, \lambda_0)/\partial x^2 \neq 0$, то вместо (2.4) получится формула

$$\Delta x = \pm \sqrt{-2 \frac{\partial F(\bar{x}, \lambda_0)}{\partial \lambda} \Delta\lambda / \frac{\partial^2 F(\bar{x}, \lambda_0)}{\partial x^2}} = \pm \sqrt{c_1 \Delta\lambda}. \quad (2.5)$$

Здесь уже картина другая (рис. 9) — при $\lambda > \lambda_0$ появились два решения, а при $\lambda < \lambda_0$ их нет совсем (если считать, что c_1 положительно). Пример такого поведения дает все та же задача о нагрузке колонны. Пусть в начальном состоянии колонна не идеально прямая, а немного изогнута в одну сторону. Тогда рис. 7, показывающий зависимость максимального изгиба от нагрузки, изменится

⁵ Читатель, наверно, знаком с рядом Тейлора $F(x + \Delta x) = F(x) + \frac{dF}{dx} \Delta x + \frac{1}{2} \frac{d^2 F}{dx^2} (\Delta x)^2 + \dots$. Формула (2.3) — его обобщение на случай двух переменных.

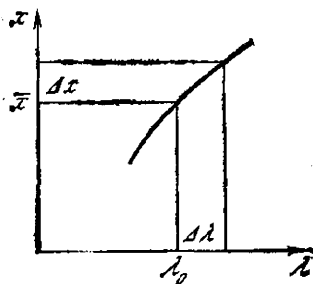


Рис. 8. Зависимость $x(\lambda)$
($\partial F(\bar{x}, \lambda_0)/\partial x \neq 0$)

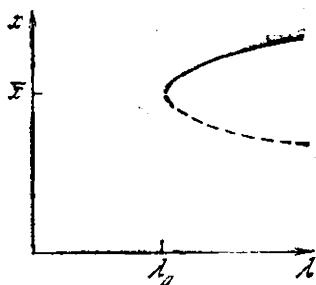
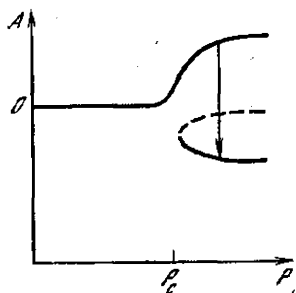


Рис. 9. Зависимость $x(\lambda)$ ($\partial F(\bar{x}, \lambda_0)/\partial x = 0$ и $\partial^2 F(\bar{x}, \lambda_0)/\partial x^2 \neq 0$)

Рис. 10. Зависимость отклонения от величины нагрузки для неидеальной колонны



и станет такой, как рис. 10. Нижняя часть рис. 10 совпадает с рис. 9.

Если постепенно увеличивать нагрузку, начиная с $P < P_c$, то решение будет все время оставаться на верхней ветви, и никакой бифуркации не произойдет. Колонна будет все больше прогибаться в направлении первоначального изгиба. Но если к ней приложить нагрузку в горизонтальном направлении, например ударить достаточно сильно, то колонна прогнется в другую сторону. Произойдет перескок на нижнюю ветвь решений, или «хлопок» (см. рис. 10). В одних случаях с хлопками надо бороться, в других — их можно использовать на практике. Другими словами, формуле (2.5), по которой «ниоткуда» появляется пара состояний равновесия, соответствует конкретное явление в теории упругости.

На всех рисунках в этой главе сплошной линией мы обозначаем ветвь, на которой лежат устойчивые состояния равновесия, пунктиром — неустойчивые. Пусть x — состояние равновесия уравнений (2.1). Мы будем называть его *устойчивым*, если любое достаточно малое отклонение от \bar{x} остается малым и со временем стремится к нулю (точнее говоря, это свойство называется асимптотической устойчивостью). Если же можно найти сколь угодно малые

отклонения от \bar{x} , растущие со временем, то такое состояние *неустойчиво*. Теория ветвления позволяет достаточно просто выяснить не только число решений уравнения (2.2), но и устойчивость каждого из них. Далее будем полагать, что это уже сделано.

«Но ведь может оказаться», — скажет читатель, — «что и $\partial F(\bar{x}, \lambda_0)/\partial x^2$, $\partial^2 F(\bar{x}, \lambda_0)/\partial \lambda^2$ равны нулю. Как же быть тогда?» Ответ прост — нужно учитывать следующие члены: $\partial^2 F(\bar{x}, \lambda_0)/\partial \lambda^2 (\Delta \lambda)^2$, $\partial^2 F(\bar{x}, \lambda_0)/\partial x \partial \lambda \Delta x \Delta \lambda$ и прочие. Если хотя бы одна из вторых производных не равна нулю, то типичные бифуркации будут такими, как показано на рис. 11. Рис. 11, а мы видели в задаче о прогибе колонны. Рис. 11, б соответствует бифуркации, которую условно можно назвать «обменом устойчивостью». Состояния равновесия, лежащие на одной ветви, становятся в точке λ_0 , \bar{x} устойчивыми, лежащие на другой — неустойчивыми. Бифуркацию, показанную на рисунке 11 б, называют *подкритической* (в отличие от *надкритической*, показанной на рисунке 11, а). Она отличается тем, что возникшие в результате ветвления решения лежат в той же области параметров ($\lambda < \lambda_0$), где была расположена первоначальная устойчивая ветвь. Анализ показывает, что в этом случае они неустойчивы. При увеличении параметра λ устойчивое решение равновесия просто исчезает, и решение уравнения (2.1) переходит в другую область по x . Бифуркации, показанные на рис. 11, будут встречаться нам еще не раз.

Предполагая равенство нулю первых производных функции F в точке (\bar{x}, λ_0) , мы получили рисунки (11). Но с таким же успехом можем приравнять к нулю и следующие производные, получая при этом все более сложные бифуркационные диаграммы. Все ли они окажутся одинаково важными или какие-то будут встречаться чаще других?

Задумываясь над такими вопросами, ученые пришли к важной идее *грубости* системы. Ее можно пояснить на простом примере. Если мы моделируем какой-либо реальный процесс, то функция F нам, скорее всего, известна приближенно. При небольшом ее изменении изменятся и все ее состояния равновесия \bar{x} . Но естественно ожидать, что основные качественные свойства, такие, как число решений и их устойчивость, будут сохраняться. Системы, обладающие таким свойством, получили название *грубых*. Именно они в первую очередь и будут наблюдаться в эксперименте,

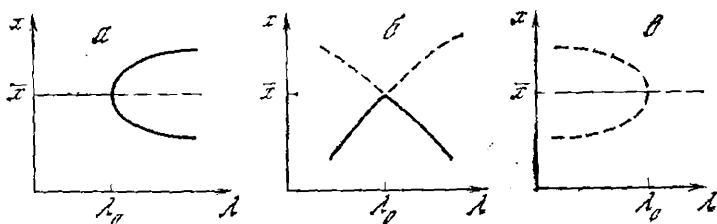


Рис. 11. Типичный вид бифуркационной диаграммы в том случае, когда хотя бы одна из вторых производных не равна нулю

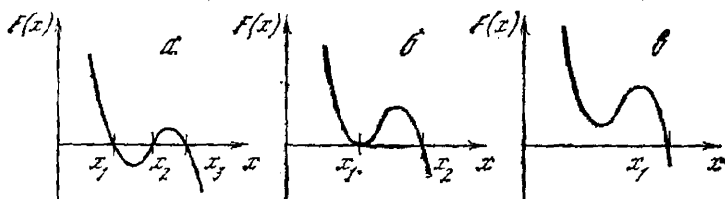


Рис. 12. Функция $F(x, \epsilon)$ при трех значениях параметра

Рассмотрим для примера две различные функции F (рис. 12, а, б). Легко видеть, что число корней первой функции не изменится при малых деформациях кривой. Во втором случае все происходит иначе. Уравнение $F(x) = 0$ имеет два решения, $F(x) + \epsilon = 0$ — одно (рис. 12, в), а $F(x) - \epsilon = 0$ — три решения, сколь бы малым мы не выбрали положительное число ϵ . Систему (2.1), в которую входит функция $F(x)$ с рис. 12, б, естественно отнести к негрубым. Две другие функции характеризуют грубые системы. Грубые случаи иногда также называют случаями общего положения.

Рассматривая какую-нибудь конкретную модель, всегда можно считать, что она является грубой. Но в целом семействе моделей, зависящих от параметра λ , иногда будут встречаться и негрубые ситуации. Например, при изменении параметра λ мы переходим от одной грубой системы (см. рис. 12, а) к другой (см. рис. 12, в) через негрубую (см. рис. 12, б). При $\lambda = \lambda_0$ два корня исчезают, происходит бифуркация, показанная на рис. 9.

Вернемся к вопросу, поставленному в начале этого раздела. Чем больше условий мы накладываем на производные функции $F(x, \lambda_0)$, тем более негрубые системы такая функция описывает, тем реже они встречаются. Их надо исследовать только тогда, когда задача содержит не-

сколько параметров $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ или обладает специальными свойствами, например симметрией. Этот вывод является очень общим: в большинстве моделей встречаются несколько наиболее простых типов бифуркаций, с которыми мы уже познакомились.

Соображения о грубости моделей различных процессов высказывались еще Анри Пуанкаре. Однако широкое распространение и дальнейшее развитие они получили в 30-е годы нашего века, когда появились конкретные прикладные задачи, где они играют принципиальную роль. Эти задачи возникли в связи с развитием радиотехники. Их изучение привело к созданию теории колебаний. Основную роль в становлении этой теории сыграли советские ученые Л. И. Магдальштам, А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин и др.

Многие радиотехнические системы, например генераторы, удается описать системой двух обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$dX/dt = F_1(X, Y), \quad dY/dt = F_2(X, Y), \quad (2.6)$$

которую часто называют *динамической системой*. Любое ее решение $\{X(t), Y(t)\}$ описывает некоторую кривую на плоскости $\{X, Y\}$. Эту кривую мы будем называть *фазовой траекторией*. Попробуем выяснить, что происходит с решениями на больших временах. Как и раньше, будем считать их ограниченными. Система (2.6) гораздо сложнее, чем уравнение (2.1). Но может оказаться, что $X(t) \rightarrow \bar{X}$, $Y(t) \rightarrow \bar{Y}$ при $t \rightarrow \infty$, так же как в одном уравнении. По-видимому, что

$$F_1(\bar{X}, \bar{Y}) = F_2(\bar{X}, \bar{Y}) = 0. \quad (2.7)$$

Все точки, для которых выполнено равенство (2.7), назовем *особыми точками* динамической системы. Они тоже описывают ее состояния равновесия, или стационарные решения.

Если все решения, близкие к особой точке в начальный момент времени, стремятся к ней, то точка называется *устойчивой*. Типичная картина решений в ее окрестности в этом случае будет такой, как показано на рис. 13. Первая точка называется *устойчивым узлом*, вторая — *устойчивым фокусом*. Особая точка может быть и неустойчивой — *неустойчивым узлом*, *фокусом* (рис. 14, а) или *седлом* (рис. 14, б). Других типов особых точек в грубых динамических системах не бывает.

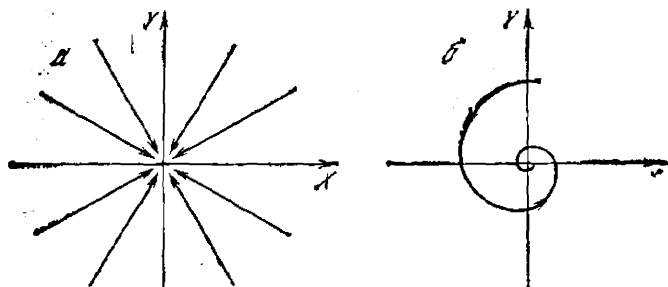


Рис. 13. Вид фазовых траекторий в окрестности
 а — устойчивого узла; б — устойчивого фокуса

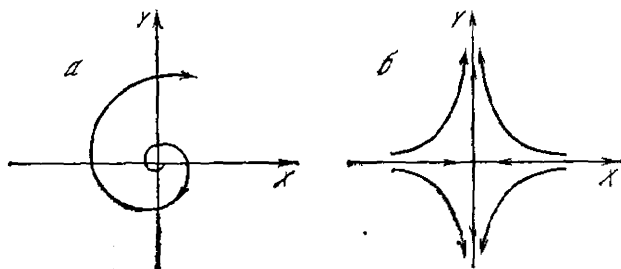


Рис. 14. Вид фазовых траекторий в окрестности
 а — неустойчивого фокуса; б — седла

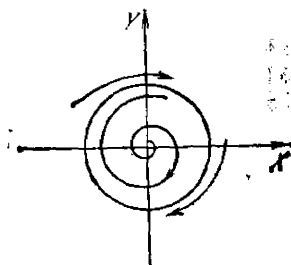


Рис. 15. Фазовые траектории
 вблизи устойчивого предельно-
 го цикла

Однако решение системы (2.6) при $t \rightarrow \infty$ не обязательно определяется состоянием равновесия, как это было в уравнении (2.1). Оно может стремиться к периодическим функциям $X(t+T) = X(t)$, $Y(t+T) = Y(t)$. В этом случае говорят, что в системе существует *устойчивый предельный цикл*. Типичная картина поведения решений в окрестности предельного цикла показана на рис. 15. Фазовые траектории изнутри и снаружи «наматываются» на цикл. Независимо от начальных данных в системе будут происходить колебания с постоянной амплитудой и частотой, их часто называют автоколебаниями,

Автоколебания были известны очень давно. На них, в частности, основана работа часового механизма. Они широко используются в разных радиотехнических устройствах. Тот факт, что математическим образом этого важного явления может служить предельный цикл, был понят сравнительно недавно. В 30-е годы он произвел большое впечатление на инженеров и на самих математиков. Начала быстро развиваться качественная теория динамических систем. Один из ее важных результатов состоит в том, что, кроме устойчивых особых точек и предельных циклов, других притягивающих множеств в грубых динамических системах вида (2.6) не бывает.

Притягивающим множеством называется такая совокупность точек на плоскости $\{X, Y\}$, к которой стремятся, «притягиваются» близкие решения при $t \rightarrow \infty$. Поэтому иногда такое множество называют *аттрактором* (от английского слова attract — притягивать).

Кроме бифуркаций состояний равновесия, рассмотренных выше, в динамических системах при изменении параметра может происходить еще одна интересная перестройка — из особой точки может возникнуть предельный цикл. Ее иногда называют *бифуркацией Хопфа*. Рассмотрим следующую систему уравнений:

$$dr/dt = \lambda r - r^3, \quad d\varphi/dt = c, \quad c = \text{const.} \quad (2.8)$$

Здесь r и φ — полярные координаты; $X = r \cos \varphi$, $Y = r \sin \varphi$. При $\lambda < 0$ в системе есть один устойчивый фокус. Когда λ становится положительным, то фокус теряет устойчивость, и возникает устойчивый предельный цикл, радиус которого равен $\sqrt{\lambda}$. Он и определяет асимптотику всех решений. С этим интересным явлением мы далее встретимся еще не раз.

Рассказывая об уравнении (2.1) или о динамической системе (2.6), мы почти не говорили о начальных условиях (соответственно $x(0)$ или $X(0), Y(0)$). На первый взгляд кажется, что начальные условия должны быть очень существенны. И действительно, в некоторых системах так и есть. Например, если в уравнениях (2.6) $F_1 = Y$, $F_2 = -X\omega^2$ (это будет уравнение математического маятника $d^2X/dt^2 + \omega^2X = 0$), то величина $E = 1/2(Y^2 + \omega^2X^2)$ будет сохраняться. Решения, у которых в начальный момент времени величина E различна, не могут стремиться друг к другу. К этому классу относятся также многие системы в небесной механике, в других областях классической физики, где поступлением энергии извне можно пре-

небрежь и где полная энергия поэтому будет сохраняться. Тем же свойством обладает уравнение Кортевега — де Вриза, в котором законов сохранения бесконечно много.

Но во многих случаях задачи (2.1) и (2.6) обладают замечательным свойством — с целого класса начальных данных при $t \rightarrow \infty$ в них происходит выход на одно и то же решение. Система «забывает» детали начальных данных. Представим себе генератор. Для того чтобы поддерживать его колебания, нужно подавать энергию извне. При этом между поступающей и рассеивающейся энергией устанавливается динамическое равновесие. Имея в виду постоянный приток энергии и его рассеяние, генератор относят к *открытым диссипативным системам*. Такие системы в настоящее время вызывают все больший интерес. Оказалось, что забывание деталей начальных данных очень характерно для них. Именно об открытых диссипативных системах и об их замечательных свойствах пойдет речь далее ⁶.

Уравнения (2.1) и (2.6) описывают системы соответственно с одной и двумя степенями свободы. Число степеней свободы определяется тем, сколько величин нужно задать, чтобы полностью охарактеризовать состояние системы. В уравнении (2.1) это значение x , в задаче (2.5) это два числа — X и Y . Но сейчас ученых все больше интересуют задачи, в которых изучаемые величины изменяются не только во времени, но и в пространстве. Например, если размеры химического реактора достаточно велики, то в описывающих его уравнениях нужно учитывать диффузионные процессы. Это дает вместо обыкновенного дифференциального уравнение в частных производных

$$X_t = DX_{xx} + F(X, \lambda), \quad 0 \leq x \leq l, \quad 0 \leq t < \infty, \quad (2.9)$$

решением которого является функция двух переменных $X(x, t)$ ($D > 0$ — коэффициент диффузии вещества X). В этой модели степеней свободы бесконечно много, потому что мгновенное состояние системы определяется значениями функции в каждой точке отрезка.

Столкнувшись с такой задачей, хочется обратиться за помощью к ЭВМ. Однако любая машина может иметь дело только с такой системой, которая описывается конечным набором чисел. Встает вопрос, насколько хорошо решения

⁶ Близкие вопросы рассматривались в брошюре: Курдюмов С. П., Малинецкий Г. Г. Синергетика — теория самоорганизации. Идеи, методы, перспективы. М.: Знание, 1983. 63 с.

этой конечномерной системы и решения исходной задачи согласуются между собой. Можно ли говорить, например, о бифуркациях *стационарных решений* (у которых $X_t = 0$) в задаче (2.9)? Похожи ли они на те бифуркации, о которых шла речь выше? Сколько нужно взять обыкновенных дифференциальных уравнений, чтобы они с достаточной точностью приближали уравнение в частных производных? Вопросы эти оказались трудными, исчерпывающих ответов на них математики пока не знают. Но то, что удалось выяснить, оказалось очень интересным.

На примере модели (2.6) мы познакомились с бифуркацией рождения предельного цикла. Она встречается и в системах большего количества уравнений. Однако там, где она происходит, можно выбрать такие переменные, две из которых X и Y связаны системой вида (2.8). В ней и содержится вся информация о происходящей бифуркации. Все остальные переменные «подстраиваются» к этим двум, наиболее важным.

Также дело обстоит и во многих задачах с частными производными. Не все степени свободы играют одинаковую роль. В нелинейной диссипативной системе обычно удается выделить конечное, а иногда и небольшое число переменных, к которым «подстраиваются» остальные. Эти переменные называют иногда *параметрами порядка*. Это можно пояснить на таком примере. Возьмем функцию $u(x)$, заданную на интервале от 0 до l . Ее можно разложить по гармоникам (математики говорят — разложить в ряд Фурье) и найти амплитуду каждой гармоники. Пусть функция $u(x)$ имеет сложный изрезанный вид (рис. 16, а). В ее поведении не видно какой-либо закономерности или упорядоченности. При этом амплитуды многих гармоник сравнимы между собой. Напротив, гладкая функция $u(x)$ на рис. 16, б ведет себя очень просто, в ней легко заметить закономерность: она близка к периодической. Для того чтобы передать ее профиль, достаточно задать амплитуды всего нескольких мод. Если процесс идет так, что количество гармоник большой амплитуды уменьшается, то в системе будет возникать некоторая упорядоченность, будет происходить *самоорганизация*. Такую упорядоченность часто называют *диссипативными структурами*, чтобы подчеркнуть ту роль, которую играют диссипативные процессы в ее образовании.

Значение диссипативных структур для понимания многих нелинейных явлений очень велико. Одним из первых

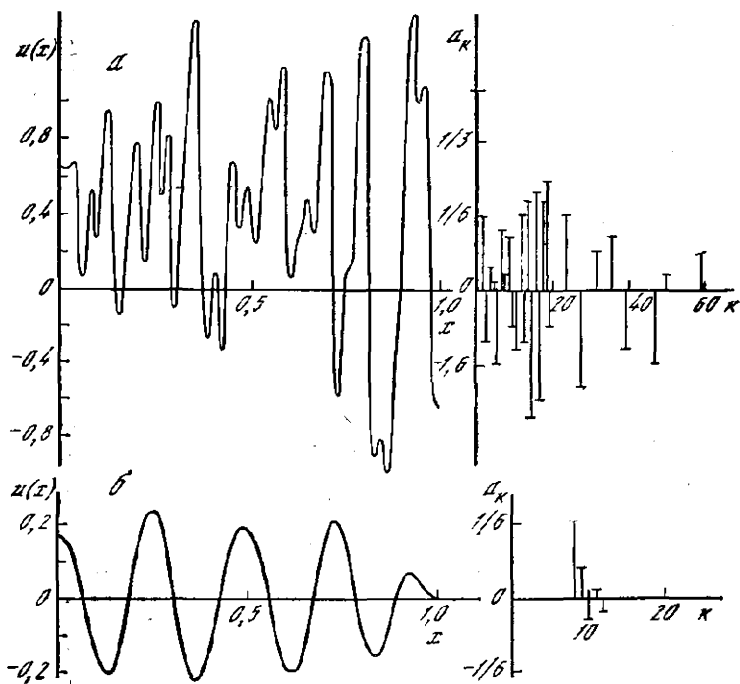


Рис. 16. Функция $u(x)$ и ее коэффициенты Фурье

Чем более изрезанной и нерегулярной является функция, тем больше коэффициентов имеют близкую амплитуду

указал на это английский ученый А. Тьюринг. Он решил исследовать с помощью математических методов один из наиболее интересных биологических процессов — морфогенез.

Биологи утверждают, что в каждой клетке организма содержится одна и та же генетическая информация. Однако в процессе развития происходит специализация клеток. Естественно предположить, что инструкции клеткам о том, какой орган они будут составлять, вырабатываются организмом в ходе его развития и это коллективный процесс.

Тьюринг полагал, что морфогенезом управляют химические процессы. Его интересовало, можно ли исходя из простейших химических представлений объяснить возникновение структур в первоначально однородной ткани. Ход рассуждений был таков, Пусть вещество X стимули-

рует развитие клеток (такие вещества сейчас известны, и их часто называют активаторами), Y замедляет его (и называется при этом ингибитором). Учет реакций, в которые вступают X и Y , привел бы к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Но нас в основном интересует распределение веществ X и Y в пространстве. В тех его областях, где много вещества X и мало Y , рост клеток будет идти более активно. Поэтому существенную роль должны играть диффузионные процессы. Их учет приводит к системе уравнений

$$\begin{aligned} X_t &= D_1 X_{xx} + F_1(X, Y, \lambda), \\ Y_t &= D_2 Y_{xx} + F_2(X, Y, \lambda), \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$X(x, 0) = X_0(x), \quad Y(x, 0) = Y_0(x), \quad 0 \leq x \leq l,$$

$$X_x(0, t) = X_x(l, t) = Y_x(0, t) = Y_x(l, t) = 0,$$

где D_1 и D_2 — коэффициенты диффузии веществ X и Y , которые считаются постоянными. Нелинейные правые части зависят от параметра λ , он описывает характеристики ткани, которые постепенно меняются в ходе развития. Конкретный вид F_1 и F_2 нам сейчас не важен. Условия при $x = 0$ и $x = l$ означают, что потоки веществ на границах системы равны нулю. Начальные данные $X_0(x)$, $Y_0(x)$ считаются близкими к пространственно однородным, но содержат малые случайные возмущения.

Тьюринг исследовал вопрос о том, как развиваются эти возмущения и к чему стремятся решения на больших временах. Результаты оказались очень интересными. Когда $\lambda < \lambda_0$ функции $X(x, t)$, $Y(x, t)$ стремятся к устойчивому, пространственно однородному решению. (Его аналог есть и во многих других задачах.) Такое решение часто называют *термодинамической ветвью*. При $\lambda > \lambda_0$, т. е. на определенной стадии развития, картина качественно меняется. Несмотря на то что начальные данные близки к однородным, возмущения нарастают, и в среде возникает структура — неоднородное по пространству стационарное распределение концентраций. Ее вид может быть, например, таким, как показано на рис. 17. Одновременно в среде возникает вторая стационарная структура, выход на которую происходит с других начальных данных.

Это замечательный факт. Учитывая только простейшие химические реакции и диффузию, можно объяснить очень сложное явление — возникновение пространственной неоднородности и структур в процессе развития тка-

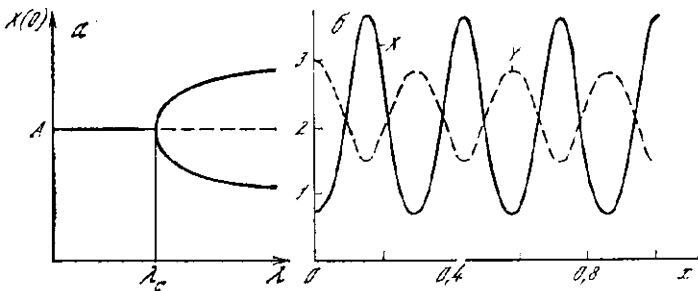


Рис. 17. В двухкомпонентной нелинейной системе могут возникать стационарные структуры

а — типичная зависимость $X(0)$ в стационарном решении задачи (2.10) в зависимости от параметра λ ; б — одно из стационарных решений этой задачи в случае $Q_1(X, Y, \lambda) = A - (B + 1)X + X^2Y$, $Q_2(X, Y, \lambda) = BX - X^2Y$. Эта модель, получившая название брюсселятора, описывает один класс химических реакций в открытых системах; роль параметра λ может играть величина B . Параметры расчета таковы: $A = 2$; $B = 4,6$; $l = 1$; $D_1 = 0,0016$; $D_2 = 0,008$

ни. Если отложить по оси ординат амплитуду стационарных решений уравнений (2.10), а по оси абсцисс значение параметра λ , то картина будет такой, как показано на рис. 17. Читатель, наверное, уже понял, что эта картинка совпадает с рис. 7. Но здесь ветвление решений наблюдается в более сложной распределенной системе. Бифуркации, возникновение диссипативных структур и самоорганизация оказались связаны самым тесным образом.

Работа Тьюринга была опубликована в трудах английского королевского общества в 1952 г. В те годы эта замечательная работа осталась незамеченной. Да и реальное существование активатора и ингибитора в биологических системах подвергалось сомнению. Интересна и другая деталь. Уравнения (2.10) нелинейны, и их надо решать численно. Однако Тьюринг не имел возможности воспользоваться ЭВМ. Профили диссипативных структур и процесс выхода на них ему пришлось считать вручную. Он указывал в своей работе, что более точный и полный анализ, который поможет глубже понять происходящее, станет возможным с использованием компьютера.

Прошло больше тридцати лет. Выводы Тьюринга блестяще подтвердились. Появились тонкие биологические эксперименты, многие из которых отлично согласуются с моделью (2.10). Предложены также более полные модели, в изучении которых помог вычислительный эксперимент,

Они получили мировое признание и помогли глубже разобраться в механизме морфогенеза.

Круг явлений, которые удалось описать с помощью уравнений (2.10), стал очень широк. Бифуркация Тьюринга была найдена в моделях химии и экологии, в физике плазмы и гидродинамике. Возникновение диссипативных структур оказалось общим свойством самых разных нелинейных систем. Сам термин «диссипативная структура» был введен бельгийским ученым И. Пригожиным. Работы ученых его школы помогли понять связь возникающих структур с представлениями термодинамики. Они сыграли большую роль как в теоретическом, так и в экспериментальном изучении упорядоченности в открытых системах. Вот как пишут Г. Николис и И. Пригожин о возникающих структурах: «...как удаленность от равновесия, так и нелинейность могут служить причиной возникновения упорядоченности в системе. Между упорядоченностью, устойчивостью и диссипацией возникает в высшей степени нетривиальная связь. Чтобы четче выделить эту связь, мы будем называть упорядоченные конфигурации, появляющиеся вне области устойчивости термодинамической ветви, диссипативными структурами. ...Такие структуры могут существовать вдали от равновесия лишь за счет достаточно большого потока энергии и вещества. ...Диссипативные структуры являют собой поразительный пример, демонстрирующий способность неравновесности служить источником упорядоченности»⁷.

Возникновение упорядоченности в открытых нелинейных системах на первый взгляд кажется парадоксальным. В равновесных системах диссипативные процессы уничтожают любую упорядоченность — устанавливается термодинамическое равновесие. В нелинейных открытых системах диссипация выступает в совершенно ином качестве. Ее совместное действие с другими процессами приводит к возникновению структур, она влияет на их тип, форму, размеры. В 70-е годы было установлено, что явления самоорганизации достаточно широко распространены в физике и гидродинамике, химии и биологии, астрофизике и в теории волн. Большая заслуга в этом принадлежит немецкому ученому Г. Хакену. Он предложил называть теорию самоорганизации *синергетикой* (дословно — теорией совместного действия), вкладывая в это слово два значения: «Я назвал новую дисциплину синергетикой.

⁷ Николис Г., Пригожин И. Самоорганизация в неравновесных системах. М.: Мир, 1979.

В ней исследуется совместное действие многих подсистем (преимущественно одинаковых или нескольких различных видов), в результате которого на макроскопическом уровне возникает структура и соответствующее функционирование. С другой стороны, для нахождения общих принципов, управляющих самоорганизующимися системами, необходимо кооперирование многих различных дисциплин»⁸. Большое количество книг и статей, посвященных синергетике, несколько международных конференций показали, что специалисты многих областей возлагают большие надежды на этот подход.

Раньше мы говорили только о самых простых диссипативных структурах — стационарных, которые описывают упорядоченность, возникающую в пространстве и не меняющуюся со временем. Ученые исследуют и другие типы структур — нестационарные, которые определенным образом перестраиваются с течением времени. В самом деле, уже в простейших системах типа (2.6) из стационарного решения (особой точки) может в результате бифуркации родиться предельный цикл, т. е. периодическое решение. Естественно было бы искать такие явления и экспериментально, например в химических реакциях.

О том, насколько невероятным казалось многим специалистам спонтанное возникновение временной упорядоченности в химических системах, свидетельствует история открытия колебательных реакций. Первые сообщения о реакциях, в которых наблюдаются установившиеся колебания, появились более шестидесяти лет назад. Они содержались в работах Дж. К. Брэя (1921 г.) и В. К. Моргана (1916 г.). Однако химики не придали значения этим работам. Одни думали, что дело в несовершенстве экспериментальной методики, другие видели в них противоречие с основами термодинамики. Эти работы «утонули» в потоке других публикаций.

Другая периодическая химическая реакция была открыта советским ученым Б. П. Белоусовым. Она оказалась гораздо более доступным объектом для исследования, чем реакции Брэя и Моргана. Сама реакция выглядит очень красиво — по ходу процесса синяя окраска раствора периодически меняется на красную. В 1951 г. Б. П. Белоусов направил статью с описанием своих экспериментов в один из химических журналов. В полученной рецензии говорилось, что работу нельзя опубликовать, поскольку

⁸ Хакен Г. Синергетика, М.: Мир, 1980.

такая реакция невозможна. Другой журнал в 1957 г. также отклонил статью. Первое краткое сообщение было опубликовано лишь в 1959 г. в сборнике рефератов по радиационной медицине. Сейчас периодическая реакция Белоусова—Жаботинского получила мировое признание. Ей посвящены сотни статей, книги и обзоры. Ученые обнаружили и многие другие колебательные реакции, механизм которых сейчас интенсивно изучается. Все это стало мощным стимулом к исследованию процессов самоорганизации в химических и биологических системах, построению и анализу соответствующих математических моделей.

В задачах, которые мы обсуждали выше, при изменении параметра λ происходили бифуркации и возникали структуры. Что же будет наблюдаться при дальнейшем увеличении этого параметра? Произойдет ли еще одна бифуркация или целая их последовательность? Будут ли при этом усложняться диссипативные структуры? Будет ли меняться их тип?

Точку первой бифуркации во многих задачах можно изучить аналитически. Вторую бифуркацию исследовать намного труднее, а при анализе следующих нельзя обойтись без ЭВМ. Но даже после многочисленных расчетов найти общие закономерности усложнения структур обычно не удается. Только в последние годы положение дел начало меняться. Ученым удалось понять, как происходит усложнение нелинейных систем в результате последовательности бифуркаций одного определенного типа. Об этом пойдет речь ниже.

3. ПОРЯДОК И ХАОС В ОДНОМЕРНЫХ ОТОБРАЖЕНИЯХ

Разум, которому были бы известны все движущие силы природы, и достаточно сильный в аналитической обработке этих данных, мог бы выразить одним уравнением как движение самых больших тел мира, так и движение мельчайших атомов. Ничто не осталось бы для него неизвестным, и единым взглядом он мог бы обозреть как будущее, так и прошлое.

П. С. Лаплас

Дело заключается в том, что не все так просто, как может показаться на основании предыдущих рассуждений. В действительности обстоятельства, с которыми мы сталкиваемся, кажутся на первый взгляд совершенно парадоксальными с чисто математической точки зрения и предусматривать их можно только из физических соображений.

Ж. Адамар

До этого мы говорили о сравнительно сложных объектах — уравнениях в частных производных. Неоднократно отмечалось, что большую помощь в их исследовании оказали ЭВМ. Теперь речь пойдет об очень простых на первый взгляд задачах, в изучении которых огромную роль также играют компьютеры.

Допустим, нас интересует изменение численности какого-либо вида животных в определенном районе. Один раз в год мы считаем их и получаем число x . По этим данным можно построить последовательность $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ ($n = 1$ соответствует первому измерению). Для краткости будем обозначать ее $\{x_n\}$. По-видимому, среди этих чисел есть какая-то закономерность. Естественно ожидать, что численность популяции в данный год x_{n+1} зависит от того, сколько животных было год назад, т. е. от величины x_n . Таким образом, в простейшем случае

$$x_{n+1} = f(x_n, \lambda). \quad (3.1)$$

Здесь f — непрерывная функция; λ — параметр, который зависит от того, какую конкретную задачу мы рассматриваем. Часто используется такая функция f :

$$x_{n+1} = \lambda x_n (N - x_n). \quad (3.2)$$

Эта формула показывает, что численность вида быстро растет, пока она мала ($x_n \ll N$), и начинает убывать, когда животных становится слишком много. Удобно сделать замену переменных $x_n = x'_n N$, $\lambda = \lambda'/N$, при этом формула (3.2) приобретает вид

$$x'_{n+1} = \lambda' x'_n (1 - x'_n), \quad 0 \leq x'_n \leq 1. \quad (3.3)$$

В дальнейшем штрихи у новых переменных будем опускать.

Нас интересует вопрос о том, что произойдет с различными видами по прошествии достаточно долгого времени. Для ответа на него в нашей простейшей модели достаточно выяснить, какой будет последовательность $\{x_n\}$, $n \rightarrow \infty$, при различных значениях λ .

Если у читателя есть под рукой калькулятор, то, прежде чем читать дальнейшее, он может поэкспериментировать с формулой (3.3), задавая различные значения параметра. При небольших λ ($0 < \lambda < 1$) x_n стремится к нулю независимо от выбора x_1 . Судя по модели (3.3), вид, численность которого мы рассматриваем, выжить не может, сколько бы животных ни было вначале. Поведение последовательности в этом и в других случаях удобно представлять графически. Нарисуем кривую $y = f(x)$ при нашем значении λ и прямую $y = x$ (рис. 18). Отложим x_1 по оси абсцисс, проведем вертикаль до пересечения с кривой $y = f(x)$ (точка A), затем из нее горизонталь до пересечения с линией $y = x$ (точка B). Теперь вновь проведем вертикаль до пересечения с кривой $y = f(x)$, это даст нам точку C с координатой x_2 . Легко проверить, что $x_2 = f(x_1)$. Взяв точку x_2 за начальную и повторив все те же операции, получим x_3 , затем x_4 и т. д. Из рисунка видно, что $x_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Из формулы (3.3) следует, что функция $f(x)$ переводит отрезок $[0, 1]$ в отрезок $[0, \lambda/4]$. Если $\lambda \leq 4$, то все значения x_n лежат на отрезке $[0, 1]$ при условии, что $0 \leq x_1 \leq 1$. Именно поэтому говорят, что формула (3.3) задает отображение отрезка в себя.

Пусть теперь λ немного больше 1. При этом последовательность $\{x_n\}$ ведет себя по-другому (рис. 19), $\{x_n\}$

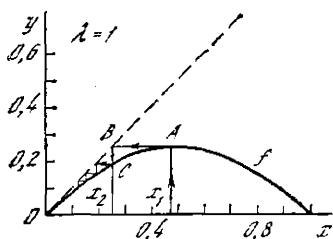


Рис. 18. Графическое представление последовательности x_n при $n \rightarrow \infty$ $x_n \rightarrow 0$

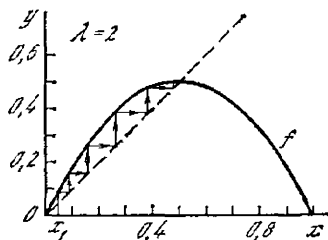


Рис. 19. Функция $f(x)$ и первые элементы последовательности $\{x_n\}$, $x_n \rightarrow x^*$ при $n \rightarrow \infty$

стремится к постоянному значению $x^* > 0$. В применении к исходной биологической задаче это означает, что численность такого вида по прошествии нескольких лет стабилизируется и перестанет меняться со временем.

Значение x^* может быть найдено из уравнения

$$x^* = f(x^*). \quad (3.4)$$

Все точки, удовлетворяющие этому уравнению, называются *неподвижными точками* функции f , так как если $x_1 = x^*$, то и $x_2 = x^*$, $x_n = x^*$ при любом n .

При $\lambda < 1$ квадратное уравнение $x^* = \lambda x^* (1 - x^*)$ имеет один неотрицательный корень $x^* = 0$. При $\lambda > 1$ неотрицательных корней два: $x^* = 0$ и $x^* = (\lambda - 1)/\lambda$. Наверно, читатель догадался, что при $\lambda = 1$ происходит бифуркация: неподвижная точка $x^* = 0$ теряет устойчивость, а вновь появившаяся точка становится устойчивой.

Можно довольно просто определить, будет ли устойчивой неподвижная точка x^* отображения $f(x)$. Пусть $x_n = x^* + \Delta x_n$, где Δx_n — малое число. Если точка устойчива, то с ростом n величина $|\Delta x_n|$ должна уменьшаться. Перепишем формулу (3.1) в виде

$$x^* + \Delta x_{n+1} = f(x^* + \Delta x_n) \approx f(x^*) + \frac{df(x^*)}{dx} \Delta x_n.$$

Последнее приближенное равенство выполняется тем точнее, чем меньше Δx_n (мы пренебрегаем членами, пропорциональными $(\Delta x_n)^2$, $(\Delta x_n)^3$ и т. д.). Поскольку $x^* = f(x^*)$, то

$$\Delta x_{n+1} \approx \frac{df(x^*)}{dx} \Delta x_n.$$

И для того чтобы $\Delta x_n \rightarrow 0$, должно выполняться неравенство

$$\left| \frac{df(x^*)}{dx} \right| < 1. \quad (3.5)$$

Это и есть условие устойчивости точки x^* .

Будем дальше увеличивать параметр λ . Поведение системы снова изменится: в последовательности $\{x_n\}$, начиная с достаточно больших n , будут чередоваться два числа a_1 и a_2 . (Точнее говоря, последовательность устроена так, что $x_{2n+1} \rightarrow a_1$, $x_{2n} \rightarrow a_2$ при $n \rightarrow \infty$.) Эти числа связаны соотношениями $a_1 = f(a_2)$, $a_2 = f(a_1)$. Будем говорить, что в этом случае отображение (3.3) имеет

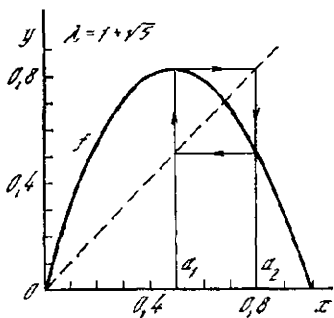


Рис. 20. Двойной цикл в одномерном отображении

Точка $x = 1/2$ является элементом сверхустойчивого цикла

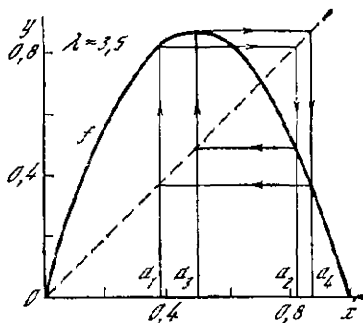


Рис. 21. Функция $f(x)$ и устойчивый цикл S^4

устойчивый цикл с периодом 2, и обозначать этот цикл S^2 . Рис. 20 показывает, как выглядит цикл S^2 на графике. Присутствие цикла S^2 в нашей модели означает, что численность популяции будет меняться с периодом в 2 года.

Переход от неподвижной точки, которую можно считать циклом S^1 , к циклу S^2 произошел в результате бифуркации, которая получила название *бифуркации удвоения периода*. Точка x^* при этом не исчезла и осталась неподвижной, однако величина $|df(x^*)/dx|$ стала больше 1.

При дальнейшем увеличении λ последовательность $\{x_n\}$ опять изменяется. Возникает цикл S^4 : $x_{4m} \rightarrow a_1$, $x_{4m+1} \rightarrow a_2$, $x_{4m+2} \rightarrow a_3$, $x_{4m+3} \rightarrow a_4$, причем $a_2 = f(a_1)$, $a_3 = f(a_2)$, $a_4 = f(a_3)$, $a_1 = f(a_4)$ (рис. 21). Численность популяции начинает колебаться с периодом в 4 года.

Но это еще не все. Последовательно увеличивая значение параметра, мы увидим циклы S^8 , S^{16} , S^{32} и т. д. При этом каждый раз цикл S^{2^p} теряет устойчивость, и устойчивым становится цикл $S^{2^{p+1}}$. Наконец, при некотором значении λ (его иногда обозначают λ_∞) формула (3.3) дает уже непериодическую последовательность $\{x_n\}$.

Полученная нами картина оказалась очень интересной. Во-первых, в поразительно простой модели (3.1) заложено очень сложное поведение. Во-вторых, в ней удастся проследить большое количество бифуркаций, приводящих к усложнению решения. Сделать это в более сложных моделях гораздо труднее. Видна определенная закономерность — нам пока встречались только циклы, период

которых равен 2^p . Хотелось бы понять, чем это вызвано, и изучить поведение модели более подробно.

Наряду с функцией (3.1) удобно рассмотреть отображение

$$y = f(f(x)) = f^2(x). \quad (3.6)$$

Далее $f^n(x)$ всегда будет соответствовать $f(\underbrace{f \dots}_{n \text{ раз}}(x))$.

В нашем случае вид $f^2(x)$ показан на рис. 22 и 23. Первый рисунок соответствует устойчивой неподвижной точке, второй — устойчивому циклу S^2 . Функция f^2 очень полезна, потому что ее график пересекается с прямой $y = x$ во всех неподвижных точках отображения $f(f^2(x^*) = f(f(x^*)) = f(x^*) = x^*)$, а также в точках, принадлежащих циклам S^2 (потому что $a_2 = f(a_1) = f(f(a_2))$, $a_1 = f(a_2) = f(f(a_1))$). Увеличивая параметр λ , мы растягиваем функцию $f^2(x)$ вдоль оси y . И если при некотором значении λ линии $y = x$ и $y = f^2(x)$ пересекаются в одной точке (см. рис. 22), то с увеличением λ могут появиться еще две точки пересечения (см. рис. 23). Они то и будут определять цикл S^2 . Действуя так же, как в случае неподвижной точки, можно показать, что устойчивость цикла с элементами x_1, \dots, x_n будет определяться формулой $\left| \frac{df^n(x_1)}{dx} \right| < 1$. Читатель, знакомый с дифференцированием сложной функции, легко проверит, что это эквивалентно неравенству

$$\left| \frac{df(x_1)}{dx} \times \dots \times \frac{df(x_p)}{dx} \right| < 1. \quad (3.7)$$

Мы выяснили, как происходит переход $S^1 \rightarrow S^2$ в отображении $f(x)$. Он обусловлен тем, что в отображении $f^2(x)$ одна из неподвижных точек теряет устойчивость и в ее окрестности появляются две новые устойчивые неподвижные точки. Здесь вновь происходит бифуркация, которая изображена на рис. 7 и уже не раз встречалась нам ранее. Рассматривая функции $f^4(x)$, $f^8(x)$ и т. д., можно посмотреть, как происходят следующие удвоения.

Оказалось, что на примере модели (3.3) можно понять не только качественные, но и удивительные количественные закономерности. Чтобы проследить за ними, построим график $x(\lambda)$, по оси x будем откладывать x_1, x_2, \dots, x_p , лежащие на устойчивом цикле, по оси λ — значения параметра. Циклу S^2 будут соответствовать две точки на одной вертикали, циклу S^4 — четыре и т. д. (рис. 24).

Рис. 22. Зависимость $y = f^2(x)$

Отображение $f(x)$ при этом значении параметра имеет устойчивую неподвижную точку

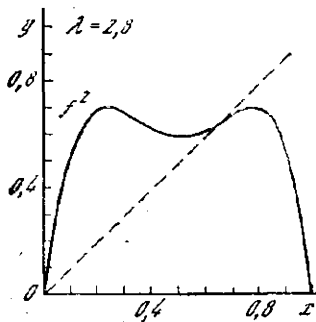


Рис. 23. Вид функции $f^2(x)$, когда $f(x)$ определяет сверхустойчивые циклы

а — цикл S^2 ; б — цикл S^4

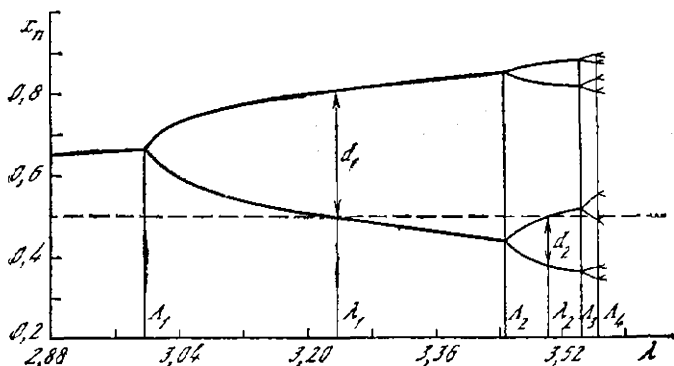
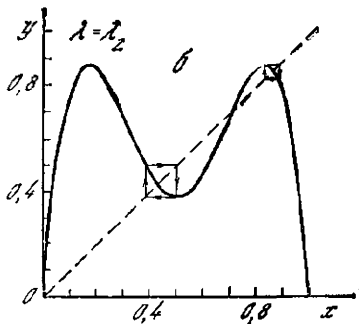
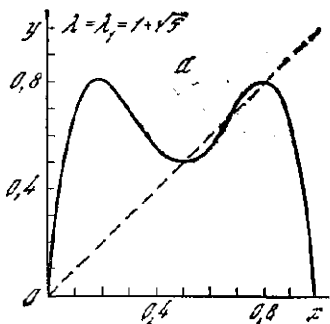


Рис. 24. Усложнение устойчивых циклов в отображении $x_{n+1} = \lambda x_n (1 - x_n)$, происходящее в результате бифуркаций удвоения периода

Обозначим через $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3, \dots$ те значения параметра λ , в которых происходили удвоения, а через $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$ — значения параметра, при которых $x = 1/2$ является элементом цикла S^2, S^4, S^8 и т. д. Введем также величины $d_1, d_2, \dots, d_n, \dots$ равные расстоянию между $x = 1/2$ и ближайшим к нему элементом цикла S^{2^n} при $\lambda = \lambda_n$. Все эти обозначения пояснены на рис. 24. Расчеты, проведенные на ЭВМ, показали, что числа Λ_n и λ_n при больших n ведут себя как геометрическая прогрессия. Ее знаменатель $\delta = 4,6692016\dots$ Другими словами,

$$\frac{\Lambda_{n+1} - \Lambda_n}{\Lambda_{n+2} - \Lambda_{n+1}} \rightarrow \delta.$$

Отношение d_n/d_{n+1} также имеет предел, равный α , где $\alpha = 2,5029078\dots$

А теперь попробуем взять вместо функции (3.3) любую другую симметричную функцию, которая имеет на отрезке $[0, 1]$ один максимум и около вершины близка к квадратичной параболе. Пусть в ней также происходит бесконечная последовательность бифуркаций удвоения при изменении некоторого параметра. Оказалось, что в любой такой модели числа α и δ будут одними и теми же! Более того, независимо от вида предел $\lim_{n \rightarrow \infty} (-\alpha)^n f^{2^n} [(x - 0,5)/(-\alpha)^n, \lambda_n]$ существует и будет одной и той же универсальной функцией $g_0(x)$.

Эти удивительные закономерности были обнаружены и поняты американским математиком М. Фейгенбаумом в 1978 г. В силу универсальности чисел α и δ и функции $g_0(x)$, других функций такого типа эту теорию называют *теорией универсальности*.

Постоянная α может быть определена из уравнения, которое имеет наглядный геометрический смысл. Сравним рис. 20 и 23, б. Элемент кривой $f^2(x)$, попавший внутрь квадрата, нарисованного пунктиром, очень похож на дугу функции f^1 , содержащуюся внутри квадрата на рис. 20. Практически они отличаются только масштабом и ориентацией осей. Оказывается, для функций f^{2^n} , $n > 1$ при $\lambda = \lambda_n$, характерна та же закономерность. Она выполняется тем точнее, чем больше n . Из этих соображений следует уравнение

$$g(x) = -\alpha g[g(-x/\alpha)], \quad (3.8)$$

позволяющее определить как функцию $g(x)$, так и значение α . Функция g определена на отрезке $[-1, 1]$; считается,

что она имеет единственный максимум при $x = 0$ и симметрична: $g(x) = g(-x)$. Вблизи максимума $g(x)$ должна быть близка к квадратичной параболе, причем $g(0) = 1$.

Уравнение (3.8), исследованное М. Фейгенбаумом, оказалось еще более сложным объектом, чем уравнения в частных производных. Оно относится к классу *функциональных уравнений*, теория которых начала интенсивно развиваться только в последние годы. Тем не менее удалось выяснить, что соотношение (3.8) определяет единственную функцию, удовлетворяющую всем дополнительным условиям и единственную постоянную α . Для решения этого уравнения также успешно применялась ЭВМ. Компьютер позволил, кроме того, получить значение δ и универсальную функцию, определяющую элементы цикла $S^{2^{n+1}}$ через элементы S^{2^n} при больших n .

Что же означают эти результаты?

В природе можно выделить два совершенно различных на первый взгляд типа явлений. Одни — регулярные и упорядоченные. Это большинство процессов, используемых в технике и технологии, процессы, в которых возникают структуры. Как правило, ход таких процессов можно предсказывать, зная управляющие ими законы.

Другие процессы — случайные, хаотические. К ним относится турбулентное движение жидкости, шумы в различных электронных системах и т. д. Они требуют другого, статистического описания, которое позволяет получить некоторые усредненные характеристики процессов. Такие явления также очень важны, но используются гораздо реже из-за их сложности и недостаточной изученности. В одних случаях турбулентное движение жидкости позволяет транспортировать уголь, руду и многое другое по трубам. В других — с турбулентными вихрями приходится бороться. Хорошо зная законы турбулентного движения, можно было бы строить более быстрые и экономичные суда и самолеты.

Теория Фейгенбаума приводит к парадоксальному выводу: между хаосом и порядком есть глубокая внутренняя связь. Непериодический, случайный процесс возникает как предел все более сложных структур (циклов S^{2^n}). Хаос возникает как сверхсложная организация (цикл S^{2^∞})! Этот вывод является очень общим: он может относиться к моделям экологии, гидродинамике — к любым системам, где есть последовательность бифуркаций

удвоения периода. В этом случае независимо от конкретного вида системы и ее сложности теория дает *количественные* предсказания; α и δ выступают здесь как универсальные постоянные, такие же, например, как числа π и e . Еще раз подчеркнем ту большую роль, которую сыграл вычислительный эксперимент в создании этой замечательной теории.

Теперь поговорим подробнее о хаосе. Если мы будем следить за последовательностью $\{x_n\}$ при $\lambda = \lambda_\infty$, то нам никогда не встретятся два в точности равных числа. (Если $x_N = x_{N+m}$, то $x_{N+1} = x_{N+m+1}$ и т. д. — это цикл S^m). Тем не менее среди $\{x_n\}$ будут попадаться очень близкие значения. Пусть $|x_p - x_q| < \epsilon_0$, где ϵ_0 очень мало. Сравним теперь числа $|x_{p+1} - x_{q+1}| = \epsilon_1$, $|x_{p+2} - x_{q+2}| = \epsilon_2$ и т. д. Расчеты показывают, что $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \dots$ не превышают ϵ_0 . Значит, с точностью до ϵ_0 мы можем предсказать ход процесса. (Если мы знаем последовательность до x_q , $q > p$, то можно предсказать значения ее элементов до x_{2q-p}). Однако дело не всегда обстоит так просто. Хаос может быть «еще более случайным». Например, если в модели (3.3) положить $\lambda = 4$, то ϵ_1 окажется больше ϵ_0 , $\epsilon_2 > \epsilon_1 > \epsilon_0$ и т. д., сколь бы малым мы не взяли ϵ_0 . Пути двух близких точек быстро расходятся. Это свойство часто называют *чувствительностью к начальным данным*. Если такая чувствительность обнаруживается в какой-то системе, то мы практически не можем предсказать ее поведение в будущем.

В применении к модели (3.1) это означает следующее. Возьмем в качестве начальных данных два числа x_1 и \tilde{x}_1 , разность которых очень мала. Построим для каждого из них последовательности $\{x_n\}$, $\{\tilde{x}_n\}$. Первые члены этих последовательностей будут очень близки, но с некоторого номера N их элементы начинают изменяться совершенно различным образом. Можно сделать вывод, что хаос, который практически не позволяет прогнозировать ход процесса, может описываться уже простейшей явной формулой (3.1).

Заметим, что в реальных системах начальные данные всегда известны с некоторой погрешностью, пусть даже очень малой. Поэтому поведение системы, которая обладает чувствительностью к начальным данным, оказывается непредсказуемым. В 1963 г. Э. Лоренц высказал мысль о том, что это обстоятельство может быть тесно связано с задачей предсказания погоды. Его работа сейчас считается классической, однако в то время ей не придали

значения. Еще недавно ученые полагали, что увеличение быстродействия и объема памяти ЭВМ автоматически приведет к появлению долгосрочных, хотя бы двухнедельных прогнозов погоды. Но этого не произошло. Может быть, причина не в недостатках алгоритмов или возможностей машин, а в существе явления? Что если чувствительностью к начальным данным обладают уравнения, описывающие состояние атмосферы?

В своей замечательной работе Э. Лоренц предложил простейшую модель конвективного движения, представляющую собой систему трех обыкновенных дифференциальных уравнений. Он показал, что эти уравнения имеют неперриодические решения, в исследовании которых помогают одномерные отображения отрезка в себя. Он проиллюстрировал их свойства на таком примере

$$x_{n+1} = 1 - 2 |x_n|. \quad (3.9)$$

С помощью калькулятора, задав несколько начальных значений x_1 , читатель тоже может проследить, как ведут себя некоторые последовательности $\{x_n\}$. Сделать это можно и на бумаге, воспользовавшись следующими несложными соображениями. Пусть x_1 имеет k знаков после запятой ($k + 1$, $k + 2$ и все остальные знаки равны нулю). Тогда можно проверить, что x_2 , x_3 и все остальные элементы последовательности будут иметь столько же или меньше знаков. Например, $x_1 = 0,3$; $x_2 = 0,4$; $x_3 = 0,2$; $x_4 = 0,6$; $x_5 = -0,2$; $x_6 = 0,6$; $x_7 = -0,2$;... Мы видим, что у всех этих чисел новые знаки не появляются. Но ведь чисел-то, у которых есть только k знаков, а все остальные нули, не больше, чем $N_k = 10^k$. Следовательно, через $N < N_k$ элементов в последовательности $\{x_n\}$ начнут появляться одинаковые числа. Значит, мы получим цикл, а не хаос. Та же картина будет наблюдаться, если x_1 — рациональное число, $x_1 = p/q$, $-1 \leq x_1 \leq 1$, p и q — целые числа. Все эти циклы будут неустойчивы, так как $\left| \frac{df}{dx} \right| = 2 > 1$ в каждой точке отрезка, и произведение $\left| \frac{df(x_1)}{dx} \times \dots \times \frac{df(x_n)}{dx} \right| = 2^n > 1$ для любого цикла S^n (см. формулу (3.7)).

А теперь в качестве x_1 зададим какое-нибудь иррациональное число. Например, $\pi/4$, $e/3$ или $\sqrt{2}/2$. Исходя из формулы (3.9) можно показать, что повторяющихся чисел в последовательности $\{x_n\}$ не будет. Есть здесь и чувствительность к начальным данным: если $|x_1 - \hat{x}_1| =$

$= \epsilon$, то $|x_2 - \bar{x}_2| = 2\epsilon$, $|x_3 - \bar{x}_3| = 4\epsilon$ и т. д., до тех пор, пока разность $|x_p - \bar{x}_p|$ не станет достаточно большой.

Мы получили интересный качественный вывод — любое рациональное число x_1 дает цикл, любое иррациональное — хаос. Но все рациональные числа, лежащие на отрезке $[-1, 1]$, можно перенумеровать, иррациональные — нет. Можно придумать такую систему интервалов, которая будет иметь сколь угодно малую общую длину и содержать все рациональные числа. Поэтому координата взятой наугад точки почти всегда оказывается иррациональной, и, значит, определяет хаос.

А можно ли найти порядок в том хаосе, который описывается формулой (3.9)? Каковы его количественные характеристики? Оказывается, можно. Несмотря на сложное динамическое поведение системы, ее статистические характеристики очень просты. Нетрудно проверить, что среднее значение величины x будет стремиться к нулю при $n \rightarrow \infty$ для любого иррационального x_1 . Величины $\langle x^2 \rangle$, $\langle x^3 \rangle$, . . . , $\langle x^p \rangle$ (средние значения x^2 , x^3 , . . . , x^p ; которые определяются по формуле $\langle x^p \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{N} \sum_{n=0}^N x_n^p \right)$)

также не зависят от начальных данных. В теории вероятностей показано, что все средние значения можно вычислить, если известна функция $P(\xi)$, $-1 \leq \xi \leq 1$, характеризующая вероятность попадания элементов последовательности в окрестность точки ξ . В нашем случае $P(\xi)$ оказывается одной и той же для всех ξ , кроме того, она не зависит от начального значения x_1 (напомним, что x_1 мы считаем иррациональным). Динамические и статистические свойства оказываются здесь связаны совершенно неожиданным образом.

Вернемся к периодическим последовательностям $\{x_n\}$, которые определяются формулой (3.1), и попробуем упорядочить их по степени сложности. Оказывается, это можно сделать для всех непрерывных отображений.

На первый взгляд кажется, что более длинный цикл является и более сложным. Это самый простой способ. Более содержательным является другой подход. Будем говорить, что между целыми числами m и n существует отношение порядка $m \succ n$, если из существования цикла S^m следует, что у того же отображения есть и цикл S^n . При этом S^m считается сложнее, чем S^n . Как было доказано советским математиком А. Н. Шарковским в 1964 г.,

это отношение упорядочивает циклы следующим образом:

$$3 \succ 5 \succ 7 \succ \dots \succ 3 \cdot 2 \succ 5 \cdot 2 \succ 7 \cdot 2 \succ \dots \succ 3 \cdot 2^2 \succ \\ \succ 5 \cdot 2^2 \succ 7 \cdot 2^2 \succ \dots \succ 2^3 \succ 2^2 \succ 2 \succ 1. \quad (3.10)$$

Последнее соотношение в этом ряду означает, что если существует цикл S^2 , то есть и неподвижная точка (цикл S^1). Доказать это очень просто. Поскольку есть цикл S^2 , то найдутся такие значения a_1 и a_2 , что $a_1 = f(a_2)$, $a_2 = f(a_1)$, $a_2 > a_1$. Теперь рассмотрим функцию $g(x) = x - f(x)$ в точках a_1 и a_2 : $g(a_1) = a_1 - f(a_1) = a_1 - a_2 < 0$ и $g(a_2) = a_2 - f(a_2) > 0$. Так как $f(x)$, а следовательно и $g(x)$, непрерывны, то существует точка a^* , где $g(a^*) = 0$, т. е. $f(a^*) = a^*$. Остальные соотношения доказываются сложнее.

Судя по формуле (3.10), самым сложным является цикл S^3 . Американские математики Т. Ли и Дж. Йорке, доказавшие этот факт в 1975 г. независимо от А. Н. Шарковского, назвали свою работу так: «Период три означает хаос». Они доказали следующую теорему. Если для непрерывного отображения F можно найти точки a, b, c, d , такие, что $b = F(a)$, $c = F(b)$, $d = F(c)$ и $d \leq a < b < c$, то это отображение имеет циклы любого периода и несчетное множество непериодических траекторий.

А теперь возьмем отображение $f(x) = 3,83x(1-x)$. Нетрудно проверить, что оно имеет цикл S^3 (рис. 25). А несколько вариантов, просчитанных на калькуляторе, убедят читателя, что этот цикл устойчив. Впрочем, можно воспользоваться и формулой (3.7), чтобы проверить неравенство $\left| \frac{df(x_1)}{dx} \frac{df(x_2)}{dx} \frac{df(x_3)}{dx} \right| < 1$. А где же остальные циклы и обещанный хаос?

Наверно, читатель догадался, в чем дело. Ни в теореме Шарковского, ни в теореме Ли—Йорке ничего не

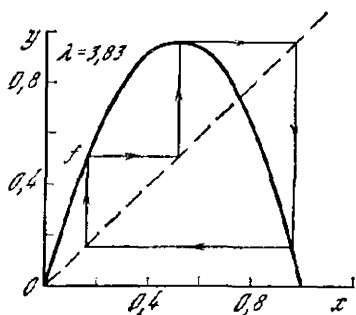


Рис. 25. Устойчивый цикл S^3 в отображении $x_{n+1} = \lambda x_n(1 - x_n)$

Почти при всех значениях x_1 последовательность $\{x_n\}$ сходится к нему

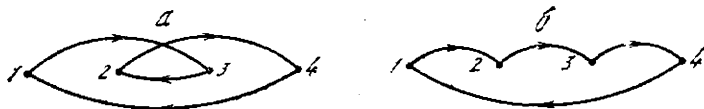


Рис. 26. Два возможных порядка обхода цикла S^4

говорится об устойчивости циклов. В приведенном нами примере непериодические траектории и все циклы, кроме S^3 , неустойчивы и поэтому не наблюдаются. Надо разобраться в том, как упорядочены устойчивые циклы. Математики сумели сделать и это.

Для простоты рассмотрим симметричные гладкие функции, заданные на отрезке $[-1, 1]$, имеющие один максимум. Будем считать, что элементы цикла S^n перенумерованы в порядке возрастания: $x_1 < x_2 < \dots < x_n$. Кроме периода цикла, введем еще две характеристики. Первая определяет тот порядок, в котором обходятся его элементы. Например, для цикла S^4 встречаются две возможности (рис. 26). Рис. 26, а соответствует тому, что $f(x_1) = x_3$, $f(x_3) = x_2$, $f(x_2) = x_4$, $f(x_4) = x_1$. В случае б порядок обхода таков: 1 2 3 4.

Для нас будет существенным также знак элементов цикла. В соответствии со знаком построим последовательность символов R и L : R , если $f(x) > 0$; L , если $f(x) < 0$. Например, последовательность $RLRL$ означает, что $x_1 > 0$, $f(x_1) < 0$, $f^2(x_1) > 0$, $f^3(x_1) < 0$. Такую последовательность можно построить для любой начальной точки x_1 . Она, вообще говоря, бесконечна и называется *маршрутом* этой точки. Но если в $\{x_n\}$ происходит выход на устойчивый цикл, то определенная комбинация элементов в маршруте начинает повторяться.

А теперь посмотрим на таблицу, содержащую информацию об устойчивых циклах, период которых не превышает шести. Удалось доказать, что в зависящих от одного параметра отображениях устойчивые циклы встречаются в том порядке, в котором они указаны в таблице. Прямые прыжки в этом списке невозможны.

Например, если мы выяснили, что при $\lambda = \lambda_1$ есть устойчивый цикл S^4 с маршрутом $RLRL$, а при λ_2 — цикл S^3 с маршрутом RLR , то обязательно найдутся такие значения λ_3 и λ_4 , $\lambda_1 < \lambda_3 < \lambda_4 < \lambda_2$, что при λ_3 устойчивый цикл S^6 с маршрутом $RLRRRL$, а при λ_4 — S^5 — с маршрутом $RLRRR$. Причем порядок обхода элементов цикла (если перенумеровать их по возрастанию) будет именно таким, как указано в таблице.

Период	Порядок обхода	Маршрут
2	1 2	R R
4	1 3 2 4	R L R L
6	1 4 3 5 2 6	R L R R R L
5	1 3 4 2 5	R L R R R
3	1 2 3	R L R
6	1 3 5 2 4 6	R L L R L L
5	1 2 4 3 5	R L L R L
6	1 2 4 5 3 6	R L L R R R
4	1 2 3 4	R L L R
6	1 2 3 5 4 6	R L L L R L
5	1 2 3 4 5	R L L L R
6	1 2 3 4 5 6	R L L L L R

Это очень сильный результат. Оказывается, между характеристиками одномерного отображения и маршрутами различных точек есть глубокая внутренняя связь. Если посмотреть маршруты для различных начальных данных x_1 , то окажется, что почти все они совпадают, если в системе есть порядок (устойчивый цикл). И наоборот, если наблюдается хаос, то почти все маршруты различаются. Свойства последовательностей из нескольких символов тесно связаны со свойствами одномерных отображений. Теория, изучающая эти свойства, получила название символической динамики. Она полезна при анализе различных нелинейных моделей. В частности, ее методы широко использовались при получении таблицы. Способ получения этой таблицы и алгоритм классификации циклов с большим периодом подробно обсуждаются в книге, которую мы рекомендуем всем интересующимся читателям⁹.

Мы говорили об устойчивых циклах, которые определяют упорядоченные режимы, и о простейших хаотических траекториях. А есть ли промежуточные случаи? Оказывается, есть. Последовательности $\{x_n\}$ при этом определяют так называемые *шумящие циклы*. Познакомимся с ними подробнее.

Допустим, нас интересует, с какой вероятностью элементы последовательности $\{x_n\}$ бывают в разных точках

⁹ Collet P., Eckmann J. P. Iterated maps on the interval as dynamical systems, Basel: Boston: Stuttgart: Birkhauser, 1980. 248 p.

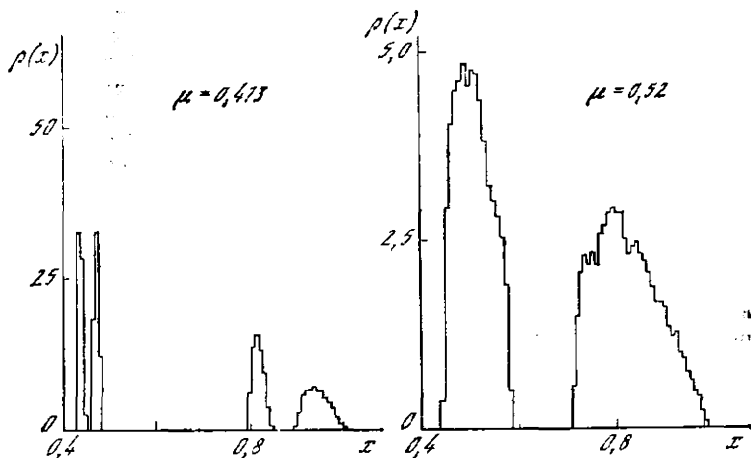


Рис. 27. Гистограммы шумящих циклов в отображении $f(x, \mu) = 1 - |x - \mu|^{3/2} / (1 + |x - \mu|^2)$ при различных значениях μ

отрезка. Определить это можно, поручив ЭВМ сделать следующую процедуру — разбить интервал на равные промежутки длиной Δ ($a, a + \Delta, \dots, a + s\Delta$) и построить функцию $I(k)$, $k = 0, \dots, s$ по следующему правилу. В начале $I(k) = 0$ для всех k , а далее, если число x_n , $n = 1, 2, \dots$ попало в интервал $a + (m - 1)\Delta \leq x_n < a + m\Delta$, к значению $I(m)$ прибавляется единица, а во всех остальных точках $I(k)$ остается одним и тем же. Далее то же делается для числа x_{n+1} и т. д. (Посчитав часть последовательности $\{x_n\}$ длины N , функцию обычно делят на $N\Delta$.) Эта процедура называется построением гистограммы.

Если Δ достаточно мало, то устойчивому циклу S^p соответствует p «столбиков» одинаковой высоты $1/(p\Delta)$ (чем меньшее значение Δ будет взято, тем выше будут столбики). Хаосу в отображении (3.9), напротив, отвечает $I(s) = \text{const}$ на всем интервале $(-1; 1)$.

Гистограммы шумящих циклов показаны на рис. 27. Они состоят из нескольких островов. В этом случае последовательности $\{x_n\}$ похожи на циклы тем, что порядок обхода этих островов является строго фиксированным. Посмотрев на часть последовательности $\{x_n\}$ с помощью гистограмм, мы можем предсказывать, в каком из островов окажется элемент x_p как бы ни было велико p . Но в какой точке острова будет лежать точка x_{p_2} мы не знаем;

а близкие траектории здесь разбегаются, поэтому шумящие циклы можно отнести к хаотическим режимам.

На рис. 27 показано, как могут вести себя шумящие циклы при изменении параметров отображения. Видно, что χ^4 переходит в χ^2 , а потом в χ^1 (через χ^n обычно обозначают шумящий цикл с n островами). Оказалось, что переходы между шумящими циклами, их структура не менее важны и интересны, чем поведение обычных циклов. Их исследованию сейчас уделяется большое внимание.

В современном естествознании особый интерес вызывают скачки, качественные переходы между разными режимами. Особенно полезно знать их типы при исследовании сложных нелинейных систем.

Пример такого скачка можно привести с помощью одномерного отображения $x_{n+1} = 1 - \lambda x_n^2$. Можно считать, что оно имеет два аттрактора: один — это тот, к которому притягиваются точки из отрезка $[-1; 1]$, другой — это ∞ . (Читатель может проверить, что если x_1 — большее по абсолютной величине отрицательное число, то $\{x_n\} \rightarrow -\infty$ при $n \rightarrow \infty$.) Каждый из них имеет свою область притяжения, которая непрерывно меняется с увеличением λ , до тех пор пока не превысит 2.

Здесь первый аттрактор исчезает, а область притяжения второго скачком увеличивается. Поведение системы качественно меняется, почти все последовательности $\{x_n\}$ теперь стремятся к $-\infty$. То, что произошло, называется *кризисом аттрактора*. Кризисы могут приводить к внезапному появлению хаоса, менять тип хаоса или порядка в системе. Кризисы характерны для многих отображений и хотя их анализ оказывается далеко не простым (обычно нужно следить не только за устойчивыми, но и за частью неустойчивых траекторий), но при исследовании некоторых моделей химии, биологии, гидродинамики он очень полезен.

Теория одномерных отображений продолжает развиваться. В ней много нерешенных проблем. Читатель убедился, что исследование простейшей нелинейной модели приводит к новому взгляду на многие глубокие вопросы — на последовательное усложнение ее поведения, на связь между динамическими и статическими свойствами. Анализ модели (3.1) позволил впервые обнаружить универсальные количественные закономерности в поведении многих нелинейных систем. Хаос и порядок оказались связанными совершенно неожиданным образом.

Принципиальную роль в развитии этого направления сыграл вычислительный эксперимент. Он не только послужил новым инструментом исследования, но и помог выработать новый взгляд на вещи, получить неожиданные результаты в тех областях, которые интенсивно изучались и раньше.

К сожалению, мы не можем рассказать о многих других результатах теории одномерных отображений, о ее блестящих доказательствах и неожиданных приложениях. Но нам бы очень хотелось, чтобы читатель почувствовал, как прекрасна эта теория.

4. ДИССИПАТИВНЫЕ СИСТЕМЫ В ОКРЕСТНОСТИ ТОЧКИ БИФУРКАЦИИ

Наиболее интересными являются те факты, которые могут служить свою службу многократно, которые могут повторяться. Мы имели счастье родиться в таком мире, где такие факты существуют.

А. Пуанкаре

Речь пойдет о более сложном математическом объекте — о системах двух уравнений в частных производных. Интерес к моделям такого класса возникает потому, что с их помощью удалось описать широкий круг нелинейных процессов. Эти уравнения, естественно, возникают в химии, биологии, физике плазмы, теории горения и других областях.

Будем рассматривать следующую задачу:

$$X_t = D_1 X_{xx} + Q_1(X, Y, \lambda), \quad (4.1)$$

$$Y_t = D_2 Y_{xx} + Q_2(X, Y, \lambda),$$

$$a \leq x \leq b, \quad 0 \leq t < \infty,$$

$$X(x, 0) = X_0(x), \quad Y(x, 0) = Y_0(x),$$

$$X_x(a, t) = X_x(b, t) = Y_x(a, t) = Y_x(b, t) = 0.$$

Поясним смысл этих формул. Искомые функции $X(x, t)$, $Y(x, t)$ нам надо определить при всех значениях x в интервале $[a, b]$ и всех положительных значениях времени ($t > 0$). В задачах химической кинетики X и Y соответствуют концентрациям реагирующих веществ, t — времени, x — расстоянию от левого края пробирки ($x = 0$), общая длина которой L равна $b - a$. Положительные константы D_1 и D_2 — коэффициенты диффузии, Q_1 и Q_2 — нелинейные функции, которые описывают происходящие

в системе химические реакции. Чтобы определить решение, нам нужно знать начальные данные $X_0(x)$, $Y_0(x)$ — концентрации реагирующих веществ в начальный момент времени. Кроме этого, необходимо задать граничные условия (последняя строка в формуле (4.1)). Выписанные условия соответствуют тому, что пробирка непроницаема с обоих концов как для вещества X , так и для Y .

Как правило, мы можем влиять на ход процесса (например, меняя температуру реакции или добавляя катализатор). Это отражает параметр λ в функциях $Q_1(X, Y, \lambda)$, $Q_2(X, Y, \lambda)$. Нас интересует не только решение задачи (4.1) при фиксированных внешних условиях, но и его зависимость от этих условий.

Если в уравнениях (4.1) $Q_1(X, Y, \lambda) = 0$, $Q_2(X, Y, \lambda) = 0$, (это соответствует тому, что реакций в системе нет), то решения ведут себя очень просто. Независимо от начальных данных по прошествии некоторого времени функции X и Y станут однородными (т. е. не будут зависеть от координаты x) и стационарными (не будут зависеть от времени). Это и понятно — в системе идут диффузионные процессы, сглаживающие все неоднородности.

Если начальные данные не зависят от x , то задача опять упрощается: слагаемые $D_1 X_{xx}$ и $D_2 Y_{xx}$ будут все время равны нулю, и вместо (4.1) мы получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$dX/dt = Q_2(X, Y, \lambda), \quad dY/dt = Q_2(X, Y, \lambda),$$

$$X(0) = a_1, \quad Y(0) = a_2, \quad 0 \leq t < \infty,$$

которая намного проще. Как мы уже упоминали, ее решения почти всегда стремятся к постоянным или периодическим функциям при $t \rightarrow \infty$ (мы вновь рассматриваем только ограниченные решения).

Во всех других случаях обычно приходится использовать ЭВМ. Изучением различных моделей вида (4.1) занимались и занимаются тысячи ученых, большие научные коллективы. Тем не менее нельзя сказать, что мы сейчас представляем все основные типы решений этой задачи. По-видимому, здесь будет обнаружено еще много неожиданностей.

Сложность задачи обусловлена тем, что в уравнения входят одновременно нелинейные функции $Q_1(X, Y, \lambda)$, $Q_2(X, Y, \lambda)$ и диффузионные члены. Малое изменение правых частей может качественно перестроить ее решения. Известный теоретик Р. Фейнман так писал об одной моде-

ли в гидродинамике: «Что ожидает нас в более сложных уравнениях, если даже в таком простом уравнении с одним единственным параметром мы видим такое разнообразие возможностей!» В равной мере это относится и к задаче (4.1).

Наверно, после всего сказанного у читателя сложилось впечатление, что изучение уравнений (4.1) на нынешнем этапе представляется безнадежной задачей. Однако в 1975 г. в ее анализе был достигнут большой успех. Если мы имеем дело со сложной задачей, то первым и естественным шагом является классификация изучаемых объектов. Так, в свое время поступили зоологи и ботаники, что очень помогло им в дальнейшем. Оказалось, что многие модели вида (4.1) в физике, химии и других науках обладают общими чертами.

Их типичное поведение таково. При всех значениях параметра уравнения (4.1) имеют единственное однородное стационарное решение \bar{X} , \bar{Y} . Это решение устойчиво при $\lambda < \lambda_0$. В этом случае $X(x, t) \rightarrow \bar{X}$, $Y(x, t) \rightarrow \bar{Y}$ независимо от начальных данных. При $\lambda > \lambda_0$ в системе возникает упорядоченность. Решение \bar{X} , \bar{Y} становится неустойчивым. При этом могут возникнуть неоднородные стационарные решения или колебания. В первом случае типичная картина будет такой, как на рис. 7. Слева от точки λ_0 есть одно устойчивое решение, справа — два устойчивых и одно неустойчивое. В точке λ_0 начинается усложнение решений задачи (4.1). Естественно начать исследование различных нелинейных систем с этой области параметров.

В 1975 г. японские ученые И. Курамото и Т. Цузуки показали, что все типичные системы, у которых ответившиеся решения лежат вблизи \bar{X} , \bar{Y} , в окрестности точки бифуркации описываются одним и тем же уравнением, которое имеет вид

$$W_t = W + (1 + ic_1)W_{xx} - (1 + ic_2)|W|^2 W, \quad (4.2)$$

$$W(x, 0) = W_0(x), W_x(0, t) = W_x(l, t) = 0, \quad 0 \leq x \leq l,$$

где $W(x, t) = u(x, t) + iv(x, t)$ — комплексная функция, реальная и мнимая части которой определяют поведение функций $X(x, t)$ и $Y(x, t)$ при λ , близких к λ_0 ; c_1, c_2 — действительные постоянные, которые можно вычислить, зная $Q_1(X, Y, \lambda)$, $Q_2(X, Y, \lambda)$, D_1 и D_2 .

Во второй строке (4.2) записаны начальные данные и краевые условия для функции W . Уравнение (4.2) го-

раздо проще задачи (4.1), с которой мы начали этот раздел. В нее входили произвольные нелинейные функции Q_1 и Q_2 , а в уравнении (4.2) содержатся только три постоянных параметра c_1 , c_2 , l . При этом разные модели вида (4.1) могут приводить к одним и тем же значениям этих постоянных. Тогда они будут вести себя одинаково в окрестности точки λ_0 . Это могло бы стать основой для классификации двухкомпонентных диссипативных систем, если бы мы понимали, как устроено уравнение Курамото — Цузуки (4.2). Поговорим о нем подробнее.

Что означают слова «понять уравнение»? Какой смысл вкладывают в них математики? Раньше, до появления вычислительных машин, итогом исследования обычно было доказательство того, что решение задачи существует и единственно. Но ведь хочется знать также, какое это решение. Задав конкретные параметры c_1 , c_2 и l , сегодня можно подсчитать его на ЭВМ. Однако наблюдая за этим решением, в котором зачастую трудно усмотреть какую-либо закономерность, мы не можем сказать, что поняли, как оно устроено.

О понимании можно говорить тогда, когда мы умеем предсказывать вид решения, его качественные особенности при различных значениях параметров, не решая для этого каждый раз само уравнение. Хорошо было бы предсказывать и основные количественные характеристики, пользуясь явными формулами или более простыми моделями. Таких упрощенных моделей может быть несколько, отличающихся областью применения, сложностью, методом получения. Достаточно полный набор приближенных моделей позволил бы говорить о сложных явлениях, которые описываются уравнением (4.2), пользуясь понятиями и образами, появившимися при изучении более простых задач. Разработку упрощенных моделей, выяснение их взаимосвязей, областей применения, свойств сейчас часто называют построением *иерархии моделей*.

Попробуем построить упрощенную модель для уравнения Курамото—Цузуки. Задача в частных производных описывает систему с бесконечным количеством степеней свободы. Однако, как мы уже упоминали в разд. 2, не все они одинаково важны. Решения задачи (4.2) можно представить в виде бесконечного ряда

$$W(x, t) = \sum_{m=0}^{\infty} (a_m(t) + ib_m(t)) \cos(\pi mx/l). \quad (4.3)$$

В этой формуле $a_m(t)$ и $b_m(t)$ — амплитуды гармоник,

или мод. с номером m для функций $u(x, t)$ и $v(x, t)$ соответственно. Расчеты, проведенные на ЭВМ для задачи (4.2), показывают, что a_0, b_0, a_1 и b_1 гораздо больше остальных гармоник, если длина области l не слишком велика. Попробуем использовать этот факт. Будем искать W в виде

$$W(x, t) = a_0(t) + ib_0(t) + (a_1(t) + ib_1(t)) \cos(\pi x/l).$$

Подставив эту формулу в уравнение (4.2) и отбросив все члены, в которые входят множители $\cos(\pi mx/l)$, $m > 1$ (полагаем, что они малы), получим систему четырех обыкновенных дифференциальных уравнений для a_0, b_0, a_1, b_1 . Их можно еще более упростить, если перейти к переменным $\rho_0, \rho_1, \varphi_0, \varphi_1$ по формулам $a_0 = \rho_0 \cos \varphi_0, b_0 = \rho_0 \sin \varphi_0, a_1 = \rho_1 \cos \varphi_1, b_1 = \rho_1 \sin \varphi_1$, а затем к ξ, η, θ ($\xi = \rho_0^2, \eta = \rho_1^2, \theta = 2(\varphi_0 - \varphi_1)$).

Тогда уравнений станет три¹⁰:

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= 2\xi - 2\xi(\xi + \eta) - \xi\eta(\cos \theta + c_2 \sin \theta), \\ \dot{\eta} &= 2\eta - 2\eta(2\xi + 3\eta/4) - 2\xi\eta(\cos \theta - c_2 \sin \theta) - \\ &\quad - 2k^2\eta, \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\dot{\theta} = c_2(2\xi - \eta/2) + \sin \theta(2\xi + \eta) + c_2 \cos \theta(2\xi - \eta) + 2c_1k^2,$$

$$k \equiv \pi/l.$$

Эта система гораздо проще уравнения (4.2) и несравненно проще исходной задачи, о которых мы на время забудем.

Простейшими решениями системы уравнений (4.4) являются устойчивые особые точки (при этом $\xi \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \text{const}$, $\eta \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \text{const}$, $\theta \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \text{const}$) и предельные циклы ($\xi(t)$ и $\eta(t)$ выходят на периодический режим.)

Чтобы найти координаты особой точки ($\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\theta}$), нужно положить $\dot{\xi}, \dot{\eta}, \dot{\theta}$ равными нулю и решить три полученных алгебраических уравнения. И тут нам очень везет. У самых простых точек ($\xi = 0$, или $\eta = 0$, или и то и другое сразу) их можно найти непосредственно. Координаты всех остальных определяются всего одним алгебраическим уравнением четвертой степени, значит, их не

¹⁰ Здесь $\dot{\xi} = d\xi/dt, \dot{\eta} = d\eta/dt, \dot{\theta} = d\theta/dt$.

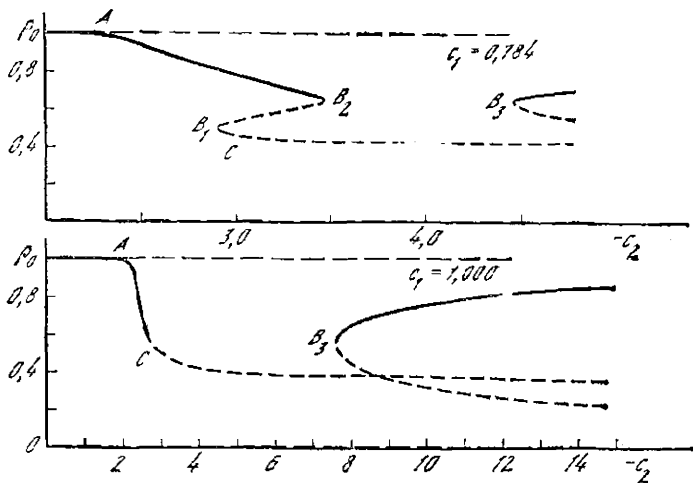


Рис. 28. Картина появления особых точек при различных значениях c_1

Сплошная линия — устойчивая точка; пунктирная — неустойчивая точка

больше четырех:

$$y^4 + by^2 + cy + d = 0. \quad (4.5)$$

Коэффициенты b , c и d достаточно сложно зависят от c_1 , c_2 и k , а величины $(\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\theta})$, которые хотелось найти, выражаются через y . Итальянские математики Кардаво и Феррари нашли формулы для всех корней алгебраических уравнений третьей и четвертой степени еще в XVI в. Однако во многих случаях, в том числе и в нашем, корни проще найти численно. Машина позволит нам посмотреть, как меняются координаты особых точек при изменении параметра c_2 (значение c_1 будет зафиксировано), и выяснить их устойчивость. Наверно, посмотрев на рис. 28, где представлены результаты таких расчетов, читатель заметит его сходство с рисунками к разд. 2. Действительно, в системе (4.4) тоже происходят бифуркации состояний равновесия. В точках A , B_1 , B_2 , B_3 и C (см. рис. 28) меняется число таких состояний или их устойчивость.

Вначале в системе есть единственная устойчивая особая точка $\xi = 1, \eta = 0$. В точке A происходит бифуркация типа «обмен устойчивостью», такая, как на рис. 11, б. Левее точки A на рис. 28 показано только одно решение, поскольку у второго $\eta < 0$ и оно соответствует комплекс-

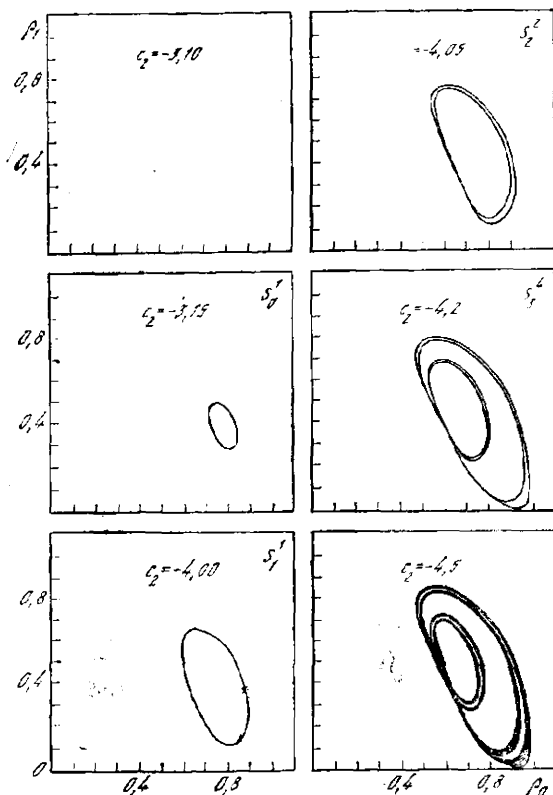


Рис. 29. Усложнение решений системы уравнений (4.4) при уменьшении параметра c_2

$$k = 1 \quad (\rho_0 = \xi^{1/2}, \quad \rho_1 = \eta^{1/2})$$

ным значениям ρ_1 . Особенно интересно явление, происходящее в точках B_1 и B_3 . Здесь «ниоткуда» появляется пара решений, в точке B_2 пара решений исчезает. Но и такую картинку мы видели раньше, когда рассматривали изгиб несимметричной колонны. Она была показана на рис. 9 и 10. В точке C происходит бифуркация рождения предельного цикла, при этом в системе уравнений (4.4) возникает периодическое решение.

Читатель видит, что здесь в разных комбинациях мы встречаем те бифуркации, те же картинки, которые возникали совсем в других задачах. И это замечательно — можно надеяться, что нам удастся разобраться и в более сложных решениях уравнений (4.4).

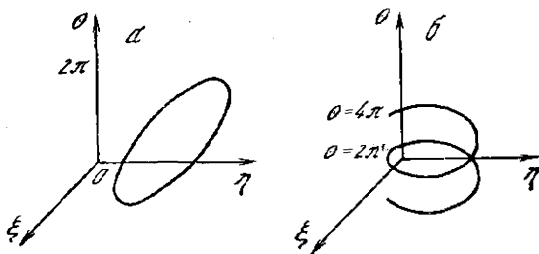


Рис. 30. Два типа траекторий, соответствующих периодическим решениям $\xi(t)$ и $\eta(t)$ системы (4.4)

a — предельные циклы первого рода; *б* — второго рода

Из рис. 28 видно, что кое-где у нас есть сразу две устойчивые особые точки. В зависимости от начальных данных $(\xi(0), \eta(0), \theta(0))$ решение стремится к одной или к другой. Есть области, где устойчивых точек нет, и аттрактор в системе должен быть другим.

Вновь зафиксируем параметр $c_1 = 3$ и посмотрим, что будет происходить с решением при уменьшении c_2 (рис. 29). Вначале была устойчива особая точка ($c_2 = -3,10$), затем появился предельный цикл ($c_2 = -3,15$). Циклы в системе уравнений (4.4) могут быть разными. Их удобно различать по числу оборотов n , которые они совершают вокруг некоторой центральной области. Из формул (4.4) видно, что если функции ξ и η меняются периодически с периодом T , то $\cos \theta$, $\sin \theta$ и $\dot{\theta}$ будут иметь тот же период. А сама фаза θ получает за это время приращение $2\pi m$, ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$): $\theta(t + T) - \theta(t) = 2\pi m$. В простейшем случае ($m = 0$) циклам соответствуют замкнутые кривые в пространстве ξ, η, θ (рис. 30, *a*). Если $m \neq 0$, то $\xi(t), \eta(t), \theta(t)$ определяют спирали (рис. 30, *б*). Цикл, который характеризуется числами m и n , будем обозначать S_m^n .

В момент бифуркации Хопфа появляется предельный цикл S_0^1 , при уменьшении параметра c_2 он переходит в S_1^1 . Потом происходит бифуркация удвоения периода, затем еще одна. В конце концов каскад таких бифуркаций приводит к хаосу (см. рис. 29). Это глубокий и интересный факт. В системе трех обыкновенных дифференциальных уравнений мы видим ту же картину усложнения решений, тот же путь к хаосу, который Фейгенбаум исследовал на примере простейших одномерных отображений!

Сочетание численных и аналитических методов позво-

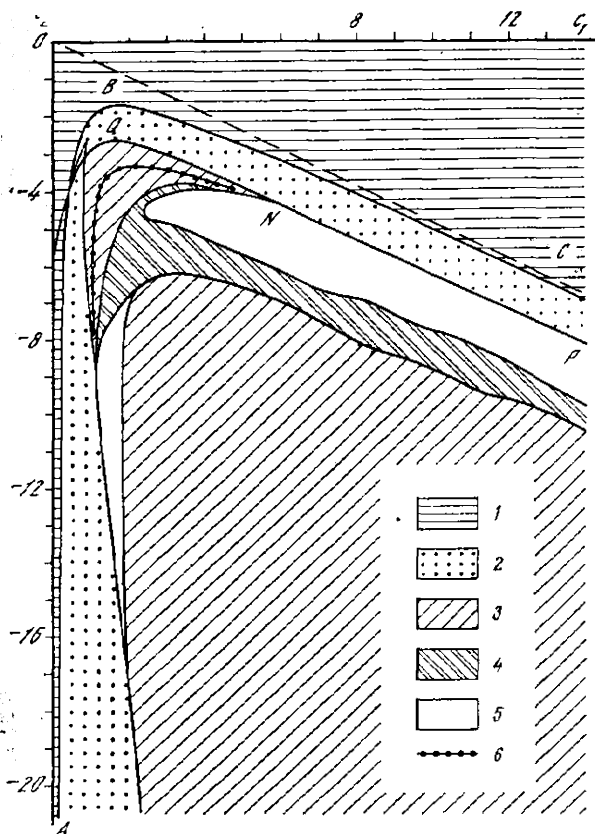


Рис. 31. Типы аттракторов системы уравнений (4.4) при $k = 1$. 1 — точка $\xi = 1, \eta = 0$; 2 — особая точка с $\xi > 0, \eta > 0$; 3 — простой цикл; 4 — цикл S^1 ; 5 — более сложные решения; 6 — линия, на которой происходит переход $S_0^1 \rightarrow S_1^1$; QNP — линии бифуркации Хопфа. Картина получена в результате численного решения уравнения (4.4)

ляет получить карту аттракторов, которая показывает тип решения системы (4.4) при различных значениях c_1 и c_2 (рис. 31). Параметр k всюду считается равным единице.

В большой области параметров выше кривой ABC устойчива особая точка ($\xi = 1, \eta = 0$). С ней граничит область, где есть другие особые точки, появление которых мы проследили выше. Во многих случаях асимптотику системы (4.4) при $t \rightarrow \infty$ определяет простой S^1 или двойной S^2

цикл. Области устойчивости более сложных циклов и те области, где есть сразу два аттрактора, очень узкие и на рис. 31 не показаны. Карта аттракторов дает классификацию решений системы уравнений (4.4) при $k = 1$ по их поведению при $t \rightarrow \infty$. Полученная картина является достаточно простой — со всеми основными бифуркациями мы были уже знакомы.

Одним из замечательных свойств модели (4.4) является то, что в некоторых случаях ее решения ведут себя хаотическим образом. Сам по себе этот факт удивителен. Как мы уже говорили, его обнаружил в 1963 г. Э. Лоренц. Еще совсем недавно ученые полагали, что сложное хаотическое поведение возникает только в системах с огромным числом степеней свободы. Уравнения Лоренца показали, что достаточно всего трех. Появилось новое понятие — «маломодовый хаос», которое даже сейчас, после работ Фейгенбаума и многих других исследователей, представляется парадоксальным. Простые нелинейные уравнения, оказывается, могут описывать очень сложные процессы. Кроме особых точек и предельных циклов, в них могут наблюдаться аттракторы, имеющие очень сложную структуру. Сейчас их называют *странными аттракторами*.

Чтобы посмотреть, каков странный аттрактор в нашей системе, воспользуемся приемом Лоренца. Уравнения (4.4) определяют движение точки с координатами $\xi(t)$, $\eta(t)$, $\theta(t)$ в трехмерном пространстве. Странный аттрактор в системе (4.4) в трехмерном пространстве, где вдоль осей x , y и z отложены соответственно $\xi \cos \theta$, $\xi \sin \theta$ и η , показан на обложке этой книги. Внешне он похож на ленту, склеенную с листом Мёбиуса, однако этот аттрактор, как и многие другие, обладает сложной внутренней структурой. Проследим за последовательными локальными максимумами функции $\xi^{1/2}(t)$ вдоль траектории. Пусть M_n — величина n -го максимума. Отложим по оси абсцисс значение M_n , $n = 1, 2, 3 \dots$, а по оси ординат — M_{n+1} . Рис. 32 показывает, что таким способом мы опять получаем одномерное отображение $M_{n+1} = f(M_n)$. При этом с высокой точностью f является непрерывной однозначной функцией. Значит, для исследования зависимости M_{n+1} от M_n мы можем применить все результаты, полученные для одномерных отображений.

Заметим, что на самом деле точки (M_n, M_{n+1}) лежат не строго на кривой f , а вблизи нее. Поэтому отображение $M_{n+1} = f(M_n)$ можно рассматривать как еще одну упро-

щенную модель для уравнений (4.4). Оно дает важную информацию о странном аттракторе этой системы. В том случае, который показан на рис. 32, хаос обладает чувствительностью к начальным данным. Близкие вначале траектории быстро расходятся.

Можно было бы рассказать еще много интересного о системе уравнений (4.4). Но тут закрадывается сомнение: а имеют ли какое-нибудь отношение ее решения к тому уравнению, которое предложили Курамото и Цузуки. Ведь при выводе этой системы мы намного упростили задачу. И три степени свободы гораздо меньше, чем бесконечность. Вопрос это действительно важный. Например, в задаче, которую изучал Лоренц, увеличение числа гармоник совершенно меняет наблюдаемую картину. Поговорим об этом подробнее.

Попробуем сравнить решения задачи (4.2) и системы (4.4). Ограничимся случаем $l = \pi$, который соответствует $k = 1$ в упрощенной системе.

Решению $W = 0$ соответствует неустойчивая особая точка ($\xi = 0, \eta = 0$). Точке ($\xi = 1, \eta = 0$) можно сопоставить однородное по пространству решение задачи (4.2)

$$W = \exp(-ic_2 t), \quad (4.6)$$

поскольку в нем есть только нулевая гармоника. Читатель может убедиться, что это действительно решение, подставив формулу (4.6) в уравнение (4.2). Оказывается, что и особая точка в системе (4.4), и однородное решение будут устойчивы при одном и том же условии

$$(c_1^2 + 1)k^4 + 2k^2(1 + c_1 c_2) > 0, \quad k = \pi/l. \quad (4.7)$$

У всех особых точек системы обыкновенных дифференциальных уравнений $\xi = \text{const}, \eta = \text{const}, \theta = \text{const}$. Посмотрим, есть ли такие решения в задаче (4.2). Расчеты на ЭВМ показывают, что они действительно есть. Величины $\rho_n^2 = (a_n^2(t) + b_n^2(t))$ у них оказываются постоянными, постоянны и сдвиги фаз между гармониками. Можно доказать, что все такие решения имеют вид

$$W(x, t) = R(x) x \exp(i\omega t + ia(x)). \quad (4.8)$$

Они описывают довольно сложный колебательный процесс. При этом функции $u(x, t)$ и $v(x, t)$ меняются периодически с периодом $T = 2\pi/\omega$. Тем не менее величина $R^2 = u^2(x, t) + v^2(x, t)$ не зависит от времени. На рис. 33 показано, как зависит функция u от координаты и времени. Зная u , можно определить и вторую компонен-

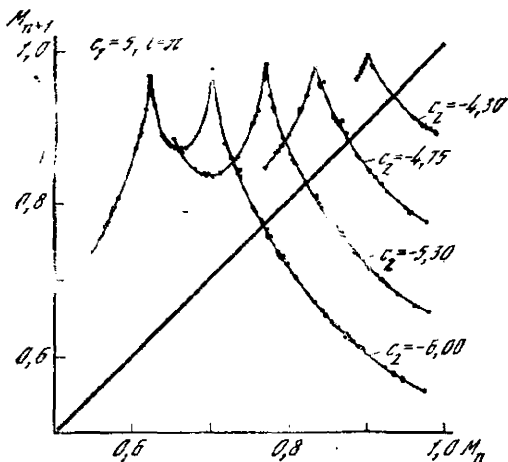


Рис. 32. Одномерные отображения, соответствующие решениям упрощенной системы (4.4), при $c_1 = 5$, $l = \pi$

При $c_2 = -5,6$ в системе есть устойчивый цикл S^2

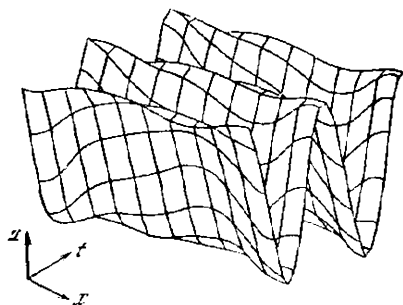


Рис. 33. Функция $u(x, t)$, соответствующая автомодельному решению вида (4.8), при $c_1 = 2$, $c_2 = -1$, $l = 18,6$

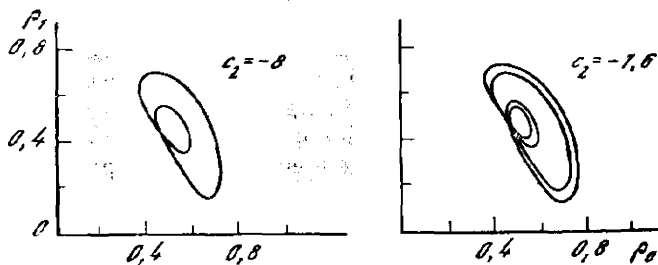


Рис. 34. Проекция решений уравнения Курамото—Цузуки на плоскость $\{\rho_0, \rho_1\}$; $c_1 = 5$, $l = \pi$

ту $v(x, t) = u(x, t - \pi/2\omega)$. Иногда решение типа (4.8) называют автомодельным (т. е. подобным себе) решением.

Функцию (4.8) также можно разложить в ряд вида (4.3) и найти амплитуды различных гармоник. Замечательным свойством нашей задачи является очень хорошее соответствие между величинами ρ_0 и ρ_1 в исходном уравнении (4.2) и значениями $\xi^{1/2}$ и $\eta^{1/2}$ в упрощенной системе. Простейшему аттрактору, устойчивой особой точке, в уравнениях (4.4) мы сопоставили сложный колебательный процесс в уравнении Курамото—Цузуки. И как оказалось, соответствие между ними носит не только качественный, но и количественный характер.

Но можно найти аналоги и еще более сложных аттракторов. Например, предельных циклов. Это будут решения, у которых величины $\rho_n(t)$ меняются периодически. Рассмотрим проекцию такого решения на плоскость $\{\rho_0, \rho_1\}$. В этой проекции мы тоже увидим цикл. Меняя параметр c_2 , можно опять получить циклы $S^1, S^2, S^4, S^8, S^{16}, \dots$. Значит, и в исходной системе также есть последовательность бифуркаций удвоения периода! Примеры циклов S^2 и S^4 из этой последовательности показаны на рис. 34. Задача в частных производных имеет и еще более сложные циклы, которые получаются не в результате удвоений. Например, в ней наблюдается устойчивый цикл S^{20} (рис. 35).

На плоскости $\{c_1, c_2\}$ удобно отметить те значения параметров, при которых в системе (4.2) существуют аналоги особых точек и циклов. Получившуюся в результате расчетов «карту» (рис. 36) можно сравнить с той, которая была приведена для упрощенной системы. Эти две карты очень похожи. Зная, как ведет себя система (4.4), легче разобраться в исходном уравнении.

Сравнивая рис. 31 и 36, мы видим две области на плоскости $\{c_1, c_2\}$, где решения приближенной системы и уравнения Курамото—Цузуки ведут себя по-разному. При $c_1 \lesssim 1,2$ в уравнении (4.2) наблюдается интересное явление. С начальных данных общего вида, которые не обладают какой-либо симметрией, происходит выход на решение вида (4.8). Но здесь оно необычно — функции $R(x)$ и $a(x)$ симметричны относительно середины отрезка. Можно сказать, что система спонтанно распадается на две одинаковые невзаимодействующие подсистемы.

Вторая область, где поведение двух систем различно, лежит при $c_2 \rightarrow -\infty$. Судя по уравнениям (4.4), там должно быть устойчиво автомодельное решение вида

Рис. 35. Устойчивый сложный цикл типа S^{20} в задаче (4.2)

Он наблюдается в расчетах при $c_1 = 5$, $c_2 = -7.3$, $l = \pi$

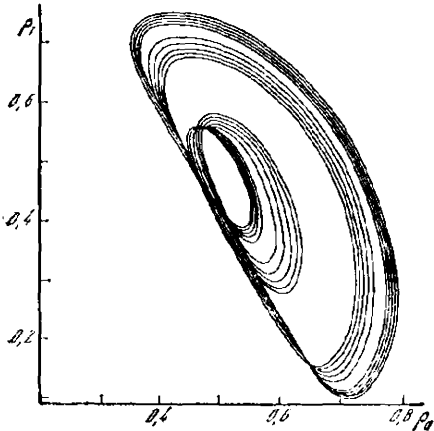
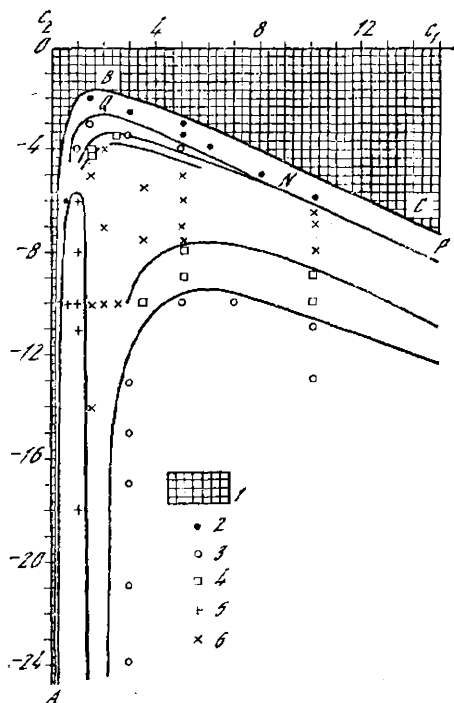


Рис. 36. Типы предельных решений при $t \rightarrow \infty$ уравнения Курамото — Цузуки в области $l = \pi$

- 1 — устойчивое пространственно однородное решение;
 2 — решение, у которого величины $\rho_i(t)$ не зависят от времени;
 3 — решение, у которого $\rho_0(t)$ и $\rho_1(t)$ определяют простой цикл;
 4 — $\rho_0(t)$ и $\rho_1(t)$ определяют цикл S^2 ;
 5 — четное решение; 6 — более сложные режимы (сплошные линии приблизительно указывают положение границ, на которых решение меняет свой тип)



(4.8). Однако в расчетах наблюдается цикл: функция $R = (u^2 + v^2)^{1/2}$ периодически меняется со временем. Причина этого состоит в том, что здесь становятся существенными не только a_0, b_0, a_1, b_1 , но и высшие гармоники. Тем не менее достаточно простая система (4.4) оказалась поразительно полезна.

Поговорим теперь о непериодических решениях уравнения Курамото—Цузуки. Они очень интересовали ученых. Их существование означало бы, что хаос может наблюдаться во многих химических и биологических системах уже в окрестности первой бифуркации. При этом сами реакции могут быть достаточно простыми. Обратим внимание, что однородные по пространству решения уравнения (4.2) всегда ведут себя одинаково: при $t \rightarrow \infty$ они выходят на решение (4.6). Чтобы подчеркнуть принципиальную роль диффузии в появлении сложных решений, непериодические решения этого уравнения стали называть *диффузионным хаосом*.

Первые сообщения о том, что система (4.2) может описывать диффузионный хаос, появились в 1976 г. Единственным источником информации о нем является вычислительный эксперимент. Поэтому большое значение приобретает методика расчетов, применяемые алгоритмы. Проведение сложных расчетов невозможно без их тщательного исследования и многократной проверки. Именно поэтому уверенность, что в системе (4.2) есть хаос, появилась только в последние годы.

Будем действовать так же, как в случае упрощенной системы. Выделим локальные максимумы M_n функции $\rho_0(t) = (a_0^2(t) + b_0^2(t))^{1/2}$ (a_0 и b_0 — амплитуды нулевой моды соответственно функций u и v). И вновь построим график $M_{n+1} = f(M_n)$. Замечательно то, что при различных c_1 и c_2 функция f с высокой точностью оказывается непрерывной и однозначной. Зависимость M_{n+1} от M_n при некоторых значениях c_1 и c_2 показана на рис. 37.

Функция f здесь может быть разной. Она может иметь один острый максимум, как в случае уравнений (4.4), иметь два острых максимума или быть гладкой, как отображение Фейгенбаума. Считая ее непрерывной и однозначной (это тоже упрощающее предположение), вновь можно применить многие результаты теории одномерных отображений.

Рассмотрим, например, отображение $f^2(M_n) = f(f(M_n))$. Для него во многих случаях можно найти точки a, b, c, d , удовлетворяющие условиям теоремы Ли—

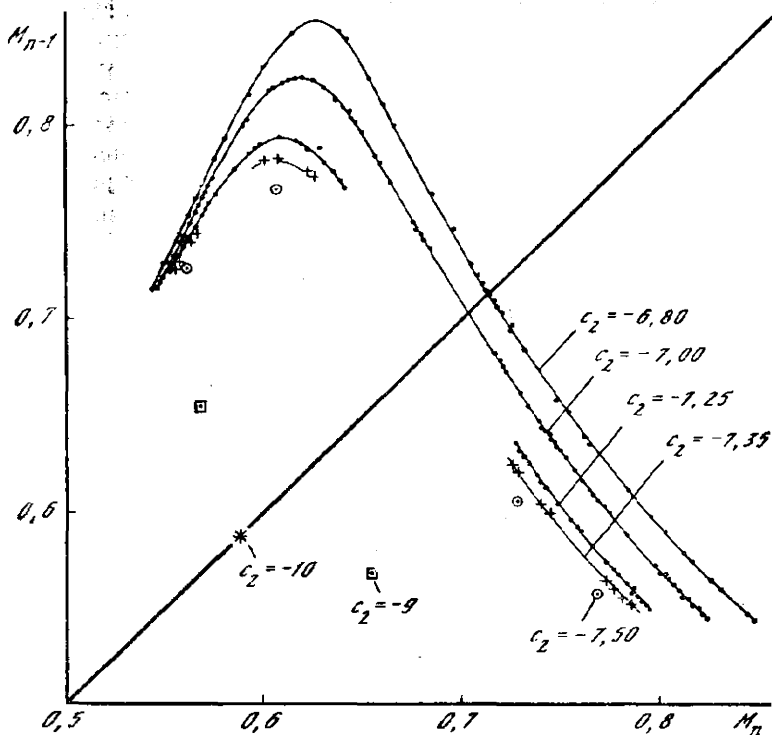


Рис. 37. Изменение одномерных отображений $M_{n+1} = f(M_n)$ в зависимости от параметра c_2

Задача (4.2) решалась при $c_1 = 5$, $l = \pi$

Йорке. Поэтому в таком отображении есть цикл S^3 , циклы любого периода и бесконечно много непериодических решений. Диффузионный хаос может быть и более сложным. Точки $\{M_n, M_{n+1}\}$ могут заполнять целые области на плоскости. Чтобы изучать такие решения, нужны отображения более высокой размерности.

У читателя не должно складываться впечатление, что сейчас уже ясны все типы сложных структур и диффузионного хаоса, которые описывает уравнение (4.2). Напротив, исследователей ждет множество нерешенных задач. Обратим внимание, например, на линию NP на рис. 36. На этой линии как в упрощенной системе, так и в исходной задаче скачком происходит переход к хаосу (в одном случае от особой точки, в другом — от автомо-

дельного решения). С такой картиной мы уже сталкивались. Вспомним про подкритическую бифуркацию (см. рис. 11, *в*), при которой один аттрактор исчезает, решение начинает притягиваться к другому аттрактору и скачком меняет свои свойства. Изучение свойств второго аттрактора и способа его возникновения требует дальнейшего анализа. И в каждой конкретной задаче оно может представлять значительный интерес.

При построении моделей различных явлений математики часто оказываются перед сложным выбором. Если учесть все факторы, о которых известно специалистам, то модель может получиться очень сложной и громоздкой. Иногда настолько сложной, что в ее изучении не смогут помочь даже самые мощные компьютеры. А если что-то и удастся посчитать, то часто бывает неясно, что означает полученный результат. С другой стороны, слишком простые и наглядные модели вызывают критику специалистов. Обычно они говорят, что самых важных и интересных процессов модель не отражает. Необходим разумный компромисс. Сегодня все чаще говорят о культуре математического моделирования как об искусстве находить такие компромиссы.

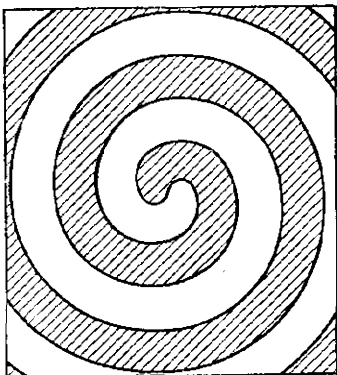
Во многих случаях фактором, необходимым для понимания различных нелинейных явлений и сильно усложняющим задачу, является многомерность. Задачи, которые мы рассматривали в этом разделе, можно отнести к одномерным. Мы полагали, что все интересующие нас функции зависят от одной пространственной переменной x . Это приближение, в действительности они зависят от всех трех пространственных координат. Наше приближение может быть применимо, если процесс идет в длинной узкой пробирке. А если реакция идет на поверхности вещества и все функции зависят хотя бы от двух переменных? Не исчезнут ли все те структуры и хаос, который нам удалось обнаружить в одномерном случае? Во многих задачах ответ оказывается неутешительным — процессы в одномерном и многомерном случаях качественно отличаются. Обратимся к нашей модели.

Будем исследовать аналог уравнения (4.2) в двумерном случае. Задачи такого типа возникают при изучении ветровых волн на воде, при моделировании морфогенеза и поверхностных реакций. Уравнение будет иметь вид

$$W_t = W + (1 + ic_1) (W_{xx} + W_{yy}) - (1 + ic_2) |W|^2 W. \quad (4.9)$$

Рис. 38. Типичный вид спиральной волны на некоторый момент времени t

В заштрихованной области $u < 0$; в незаштрихованной — $u > 0$



Оно обладает многими интересными свойствами. Мы расскажем только о двух.

Прежде всего следует поискать решения, похожие на одномерные. Самое простое из них — однородное решение $W = \exp(-ic_2 t)$. При уменьшении параметра c_2 оно теряет устойчивость. Можно

показать, что после этого возникает либо одномерное $W(x, y, t) = W(x, t)$, либо симметричное $W(x, y, t) = W(y, x, t)$ решение. Замечательно, что поведение двумерной системы может определяться одномерным уравнением.

Оказывается, у автомодельного решения (4.8) есть двумерный аналог:

$$W(x, y, t) = R(x, y) \exp(i\omega t + ia(x, y)). \quad (4.10)$$

Во-первых, это решение периодически: $W(x, y, t) = W(x, y, t + 2\pi/\omega)$, во-вторых, функция $R = (u^2(x, y, t) + v^2(x, y, t))^{1/2}$ не зависит от времени. В-третьих, если разложить это решение по гармоникам

$$W(x, y, t) = \sum_{m, n}^{\infty} (a_{mn} + ib_{mn}) \cos\left(\frac{\pi m x}{l}\right) \cos\left(\frac{\pi n y}{l}\right),$$

то величины $\rho_{mn} = (a_{mn}^2 + b_{mn}^2)^{1/2}$ также не будут зависеть от времени. Решение вида (4.10) можно тоже назвать автомодельным.

Уравнение Курамото—Цузуки в двумерном случае имеет решения, которые теперь называются *спиральными волнами*. Они описываются формулой (4.10) при условии $R(x, y) = R(r)$, $a(x, y) = S(r) + m\varphi$ ($m = 1, 2, \dots$), $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$. Название понятно из рис. 38. На нем показан типичный вид решения с $m = 1$. Если $m > 1$, то такую спиральную волну называют *многовитковой*. Спиральные волны наблюдаются экспериментально, в частности в реакции Белоусова—Жаботинского. Важно то, что существование спиральных волн не связано с конкретным видом изучаемых уравнений — это общее свойство многих открытых нелинейных систем. Ряд био-

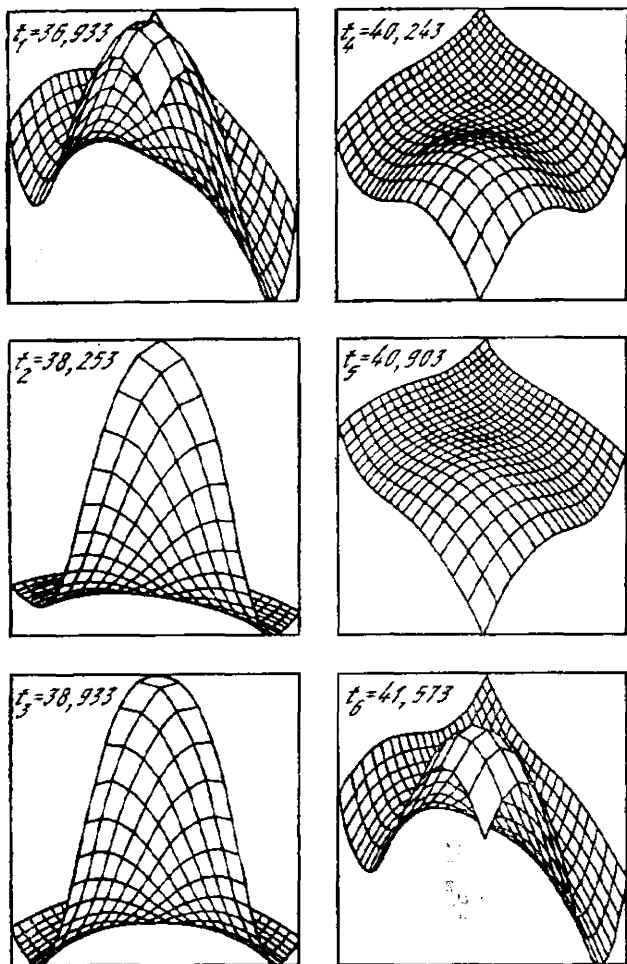
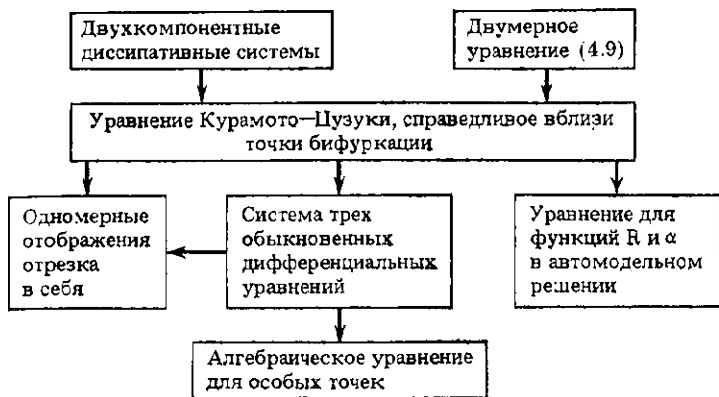


Рис. 39. Изменение функции $R(x, y, t)$ в двумерном аналоге предельного цикла

$$c_1 = 3; c_2 = -3; l = \pi$$

логов полагают, что возникновением спиральных волн можно объяснить многие биологические явления, например возникновение аритмии в работе сердечной мышцы.

Оказалось, что формула (4.10) определяет далеко не все типы структур, которые возможны в этой задаче. В самом деле, особой точкой в уравнениях (4.4) соответствова



ло автомодельное решение. Предельному циклу можно сопоставить решение с периодической функцией R в двумерной задаче. Изменение функции $R(x, y, t)$ в двумерной структуре такого типа показано на рис. 39. Разность $t_6 - t_1$ здесь близка к периоду, поэтому $R(x, y, t_1)$ и $R(x, y, t_6)$ очень похожи.

Рассказывая о диссипативных системах, мы пользовались различными упрощенными моделями. Их взаимосвязь показана на схеме. Мы видели, что анализ любой модели требует применения компьютеров и самых различных математических методов. В иерархии моделей, представленной на схеме, есть несколько уровней. Работу над изучением моделей какого-либо из них нельзя считать завершенной. На каждом уровне есть интересные задачи, требующие дальнейшего изучения. На каждом из них нас могут ждать результаты, намечающие новые пути в богатом, сложном и поразительно интересном мире нелинейных явлений.

5. ТУРБУЛЕНТНОСТЬ, ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЙ ХАОС И НЕКОТОРЫЕ ДРУГИЕ ЗАДАЧИ

Конечно, опыт остается единственным критерием пригодности математических конструкций физики. Но настоящее творческое мышление пришло именно математике. Поэтому я считаю в известном смысле оправданной веру древних в то, что чистое мышление в состоянии постигнуть реальность.

А. Эйнштейн

Ранее мы говорили о понятиях и представлениях, появившихся при изучении нелинейных моделей. Их настоящее и будущее во многом зависит от того, какую роль сыграют они в построении теорий и постановке экспериментов, позволяющих глубже понять законы природы. О нескольких экспериментах и связанных с ними идеях мы расскажем в этом разделе.

Видимо, одной из первых нелинейных моделей можно считать уравнения гидродинамики. Этой модели больше двухсот лет. Над ее анализом трудились блестящие ученые. Однако и сейчас в движении жидкости много загадок. Одна из наиболее интригующих связана с переходом к турбулентности. Движение жидкости может быть регулярным, упорядоченным. Его называют ламинарным. Но может быть и нерегулярным, хаотичным. Тогда говорят о турбулентном движении.

Характер течения жидкости удобно характеризовать безразмерным параметром — числом Рейнольдса: $Re = vd/\nu$, где v — характерная скорость жидкости; d — характерный линейный размер задачи (например, ширина канала); ν — вязкость. При увеличении числа Рейнольдса в экспериментах наблюдается переход от ламинарного потока к турбулентному. Сразу напрашивается мысль о том, что ламинарный поток — это аналог термодинамической ветви, которая теряет устойчивость. Затем после каскада бифуркаций движение системы приобретает случайный характер. При этом в промежутке между хаосом и порядком мы можем наблюдать структуры различной сложности. Один путь, приводящий к хаосу (сейчас физики часто называют такие пути сценариями перехода к турбулентности), мы знаем. Это последовательность бифуркаций удвоения периода. Прежде чем говорить о результатах эксперимента, посмотрим, нет ли других способов перехода к хаосу.

Вспомним бифуркацию Хопфа в системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Первая бифуркация приводит к тому, что из особой точки рождается предель-

ный цикл с частотой ω_1 . В результате второй бифуркации Хопфа решение становится похожим на спираль, которая наматывается на бублик (рис. 40). (Говорят, что в этом случае в системе появляется *инвариантный тор*.) В таком решении можно выделить две независимые частоты. В самом деле, перейдем в систему координат R, φ, θ , показанную на рис. 41. В этих переменных простейшая спираль, намотанная на тор, определяется формулами $R = R_0$, $\varphi = \omega_1 t + \varphi_0$, $\theta = \theta_0 + \omega_2 t$, где $R_0, \varphi_0, \theta_0, \omega_1, \omega_2$ — постоянные величины. Если отношение ω_1/ω_2 — иррациональное число, то решение будет непериодично и траектория равномерно заполнит всю поверхность тора.

Следующая бифуркация Хопфа приведет к появлению инвариантного тора более высокой размерности. При этом решение может стать похожим на спираль, которая с частотой ω_3 «навивается» на спираль, возникшую после предыдущей бифуркации. Теперь представим, что таких бифуркаций произошло много. В обычных переменных решение выглядит уже очень сложно. На первый взгляд оно кажется нерегулярным и полностью хаотичным. Может быть, его и надо интерпретировать как хаос? Представление о таком механизме возникновения гидродинамической турбулентности связывают с именами выдающегося советского физика Л. Д. Ландау и немецкого математика Е. Хопфа.

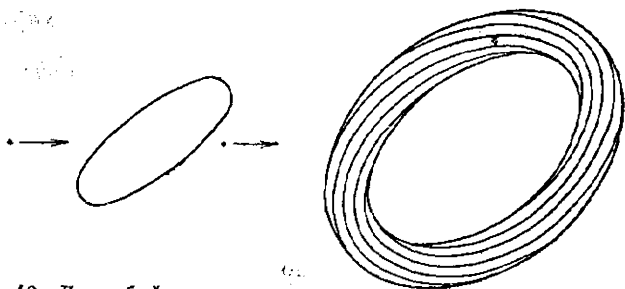
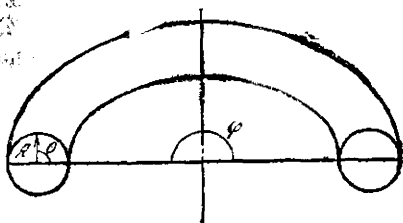


Рис. 40. Две бифуркации Хопфа, приводящие к появлению инвариантного тора

Рис. 41. При анализе инвариантного тора удобно перейти в систему координат R, φ, θ



Современная экспериментальная техника позволяет выяснить, наблюдаем ли мы в реальной системе многочастотный режим и сколько в нем разных частот. Обычно не удается обнаружить течения более чем с тремя независимыми частотами. Надо искать другой сценарий.

Его предложили в 1971 г. известные математики Д. Рюэль и Ф. Такенс. Пусть интересующая нас система уравнений описывает простейший трехчастотный режим: $\varphi_1 = \omega_1 t$, $\varphi_2 = \omega_2 t$, $\varphi_3 = \omega_3 t$, φ_n — углы в соответствующем пространстве $n = 1, 2, 3$; пусть, кроме того, $f(\varphi_n) = f(\varphi_n + 2\pi)$, где f — любая из функций, входящих в наши уравнения. Рюэль и Такенс доказали, что можно как угодно мало изменить правые части системы уравнений и решение качественно изменится. Вместо трехчастотного режима появится странный аттрактор, и поведение решений станет хаотическим. Итак, сценарий может быть следующим: две бифуркации Хопфа и хаос, наступающий после третьей бифуркации.

Эксперименты показывают, что даже в простейших системах турбулентность может возникать по-разному. Например, в некоторых работах описывается такое явление. Если наблюдать за системой достаточно долго, не изменяя ее параметров, то в упорядоченном ламинарном потоке вдруг появляются вихри, поведение которых кажется случайным. Затем картина течения вновь становится простой и регулярной до появления следующих вихрей. Это явление получило название перемежаемости. Регулярный режим перемежается с «островками» хаоса.

Простейшую модель, которая позволяет объяснить это явление, предложили П. Манневиль и И. Помо в 1980 г. Они рассматривали поведение решений системы Лоренца в определенном диапазоне параметров. А мы вновь обратимся к одномерному отображению $x_{n+1} = \lambda x_n (1 - x_n)$, чтобы результат был более наглядным.

Так же, как на рис. 24, будем откладывать по оси абсцисс значение параметра λ , по оси ординат — значения $\{x_n\}$. Чтобы исключить переходный режим, опустим первые 300 членов последовательности. При этом получится картина, показанная на рис. 42¹¹. Левая часть рисунка нам понятна — здесь происходит каскад удвоений и применима теория Фейгенбаума. Затем картина усложняется: хаос чередуется с интервалами, где есть упорядоченность,

¹¹ Этот рисунок и его подробное обсуждение можно найти в книге Collet P., Eckmann J. P. Iterated maps on the interval as dynamical systems. Basel: Boston: Stuttgart: Birkhauser, 1980.

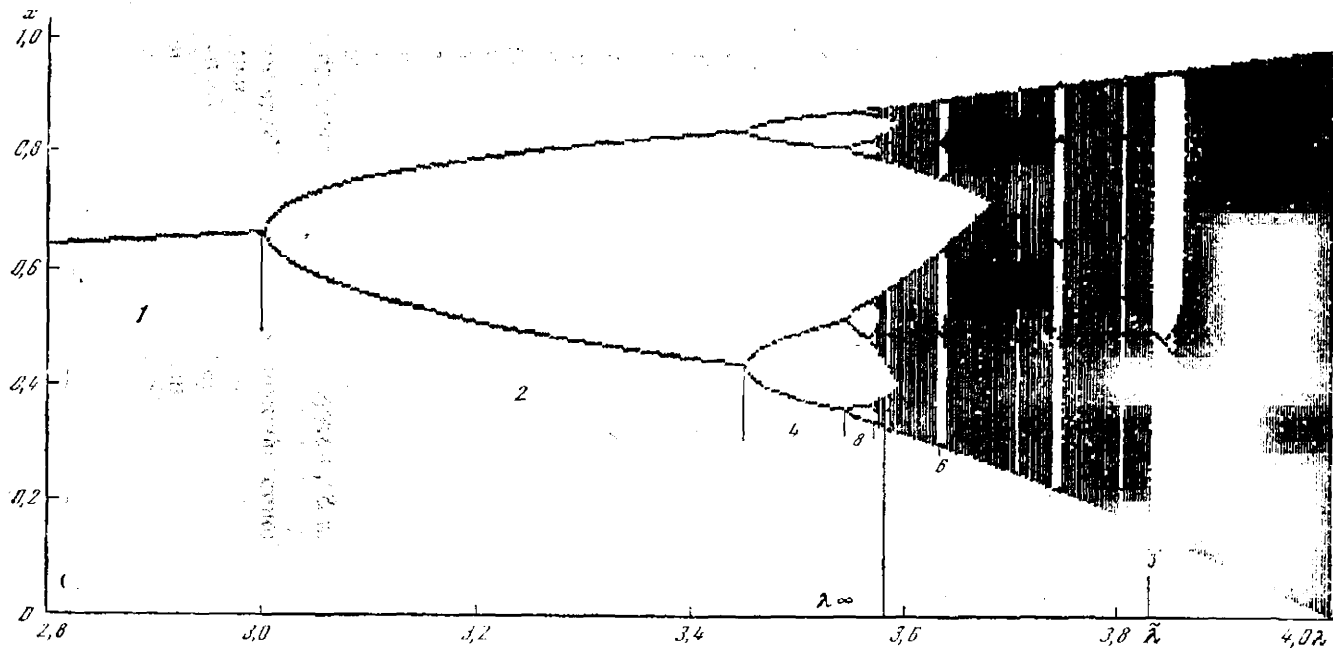


Рис. 42. Поведение последовательности $\{x_n\}$ при различных значениях параметра λ в отображении $x_{n+1} = \lambda x_n (1 - x_n)$

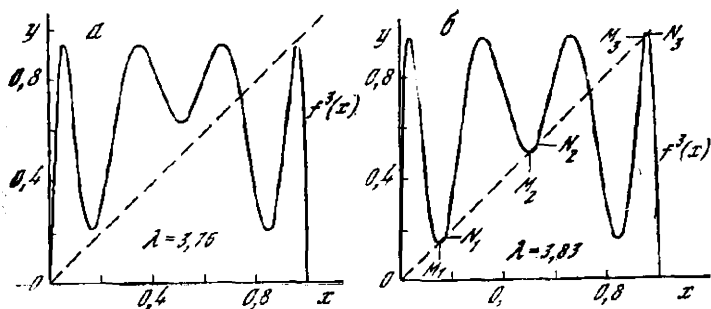


Рис. 43. Вид функции f^3 до появления устойчивого цикла и после этого

а — $\lambda < \tilde{\lambda}$; б — $\lambda > \tilde{\lambda}$

устойчивые циклы различных типов. Самый большой из этих интервалов помечен на рисунке. Здесь вначале возникает устойчивый цикл S^3 ($\lambda = \tilde{\lambda}$), потом происходят удвоения, появляются S^6 , S^{12} и все прочие циклы типа $S^{3 \cdot 2^n}$. Здесь тоже применима теория Фейгенбаума.

Неожиданным оказывается другое. При $\lambda = \tilde{\lambda}$ из хаоса внезапно появляется устойчивый цикл S^3 . Чтобы понять происходящее, рассмотрим одномерное отображение $f^3(x) = f(f(f(x, \lambda)))$ до того, как цикл появился при $\lambda < \tilde{\lambda}$ (рис. 43, а), и после этого при $\lambda > \tilde{\lambda}$ (рис. 43, б). При увеличении параметра λ кривая $f^3(x)$ становится круче и у нее появляются новые точки пересечения с прямой $y = x$. Они обозначены буквами $M_{1,2,3}$ и $N_{1,2,3}$ на рис. 43, б. Все они являются неподвижными точками отображения $f^3(x)$. Производная функции $f^3(x)$ в точках M_1, M_2, M_3 одинакова и по модулю не превосходит единицы. Именно эти точки определяют устойчивый цикл S^3 . Наклон в точках $N_{1,2,3}$ также одинаков, но там выполняется противоположное неравенство. Им соответствует неустойчивый цикл S^3 , который появился одновременно с устойчивым.

А теперь можно поэкспериментировать. Зададим какое-нибудь начальное значение x_1 и посмотрим, как действует отображение f^3 , когда $\lambda > \tilde{\lambda}$ и когда $\lambda < \tilde{\lambda}$. Другими словами, мы будем следить за каждым третьим элементом последовательности $\{x_n\}$. Расчеты показывают, что в первом случае после длительного переходного процесса точки притягиваются к циклу S^3 (рис. 44, а). Похожая картина наблюдается сначала и во втором случае: идет

медленное движение к точке M (рис. 44, б). Однако потом элементы последовательности быстро отходят от этой точки. В дальнейшем они вновь начинают приближаться к ней.

Это очень интересный факт — отображение, показанное на рис. 43, а, соответствует хаосу. Но хаос этот необычный. Большие интервалы движения к точке M , когда решение похоже на регулярное, чередуются в нем с быстрыми хаотическими выбросами. В этой простейшей модели есть *переменяемость*.

Итак, читатель знаком с тремя сценариями возникновения турбулентности. Теперь слово за экспериментом. На первый взгляд кажется, что сейчас, когда ученые умеют изучать элементарные частицы, создавать температуры, близкие к абсолютному нулю, разобраться с движением жидкости очень просто. Однако измерить скорость жидкости так, чтобы не исказить ее течения, — дело непростое. Экспериментальная техника, позволяющая сделать это, появилась совсем недавно. Сейчас для этой цели применяют лазер. Из школьного курса физики известно, что волна, отражающаяся от движущегося предмета, меняет свою частоту. Это явление называется эффектом Доплера. Доплеровский сдвиг, который ученым удалось измерить, позволяет определить скорость жидкости. Наблюдаемый процесс, как правило, очень сложен. Обработка экспериментальных данных и их анализ потребовали широкого использования ЭВМ и разработки новых математических методов.

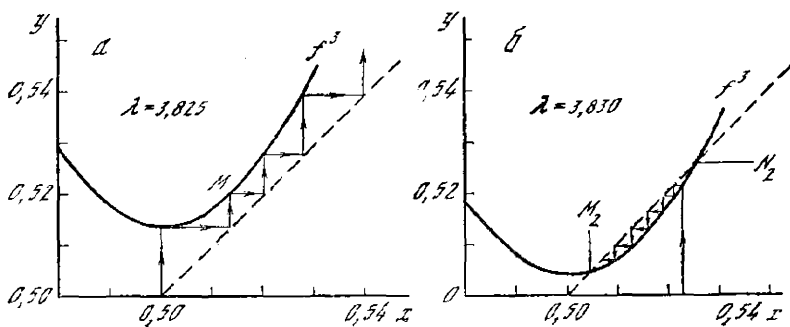


Рис. 44. Функция f^3 в более крупном масштабе
 а — $\lambda = 3,725$, цикл S^3 еще не появился; б — $\lambda = 3,830$, точка M_2 соответствует устойчивому циклу S^3 , точка N_2 = неустойчивому

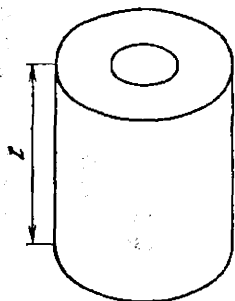


Рис. 45. Движение жидкости между двумя вращающимися цилиндрами (течение Куэтта — Тейлора)

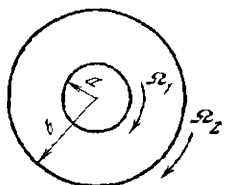
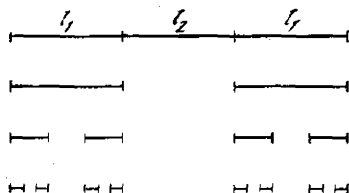


Рис. 46. Способ построения канторова множества



Переход к хаосу естественно изучать сначала на примере самых простых систем. Представим себе два коаксиальных цилиндра высоты L , радиусы которых равны a и b (рис. 45). Между цилиндрами имеется жидкость. Внешний цилиндр вращается с угловой скоростью Ω_2 , внутренний — с Ω_1 . Движение жидкости в такой системе называют течением Куэтта—Тейлора. Именно это течение при некоторых значениях $L, a, b, \Omega_1, \Omega_2$ и было подробно исследовано. Будем считать для простоты, что $\Omega_2 = 0$. Число Рейнольдса в такой задаче определяется по формуле $Re = \Omega_1 a (b - a) / \nu$.

При небольших числах Рейнольдса движение жидкости ламинарно, его можно описать явной формулой. Далее при увеличении частоты Ω_1 возникают структуры — так называемые вихри Тейлора. Их конфигурация со временем не меняется. При увеличении частоты вращения вихри Тейлора теряют устойчивость, движение жидкости становится периодическим. (Ему можно сопоставить предельный цикл в некоторой системе обыкновенных дифференциальных уравнений.) При еще больших числах Рейнольдса возникает двухчастотный режим (аналог инвариантного тора), и далее движение становится турбулентным. Качественно картина оказывается поразительно похожей на ту, что предсказывает сценарий Рюэля и Такенса.

Вместе с тем многие свойства течения не укладываются в рамки этого сценария. Рассказывая об одномерных отображениях и динамических системах, мы считали, что у системы есть только один аттрактор. Более сложный случай сосуществования нескольких аттракторов обычно оказывался исключением, а не правилом. Эксперименты с течением Куэтта—Тейлора показали, что при некоторых значениях параметров в системе может наблюдаться более ста различных устойчивых режимов. Среди них есть периодические и многочастотные течения, а также несколько типов хаоса.

Ранее мы говорили о том, что периодическое движение вихрей можно сопоставить с предельным циклом. Но ведь поток жидкости описывается уравнениями в частных производных. Значит, эта система с бесконечным числом степеней свободы. А предельный цикл — это понятие, характерное для конечномерных систем. Нет ли тут противоречия?

Противоречия не будет, если нам удастся поступать так же, как в разд. 4, — сопоставить интересующей нас задаче конечномерную систему так, чтобы их решения были близки. Но сколько уравнений нужно взять в этой упрощенной модели? Является ли наблюдаемый хаос в течении Куэтта—Тейлора маломодовым? Ответ вновь должен дать эксперимент. Но прежде чем говорить о его результатах, надо разобраться в том, что такое размерность странного аттрактора.

На первый взгляд все просто. Отрезок — одномерная фигура, квадрат — двумерная, куб — трехмерная. Если множество точек удастся разбить на маленькие отрезки так, чтобы они составили его целиком, то это одномерное множество. Если множество можно составить из квадратов — оно двумерно, из кубов — трехмерно. Однако пример так называемого *канторова множества* показывает, что не всегда размерность можно определить так просто.

Возьмем единичный отрезок $[0, 1]$, разделим его на три части и выбросим середину. Каждый из двух оставшихся отрезков разделим на три равные части и снова выбросим середины (рис. 46). Далее будем повторять эту процедуру бесконечно много раз.

Теперь посчитаем длину оставшихся отрезков, пользуясь формулой геометрической прогрессии и переходя к пределу. Длина окажется нулевой.

Во втором случае поступим так. Сначала, как и рань-

ше, выбросим отрезок длиной $1/3$, на втором шаге — два отрезка общей длиной $1/6$, на третьем — четыре отрезка, сумма длин которых равна $1/12$. Тогда окажется, что общая длина всех удаленных отрезков при $n \rightarrow \infty$ будет стремиться к $2/3$. Следовательно, то, что осталось, имеет длину $1/3$. Но ведь оставшееся множество не содержит ни одного отрезка! Проверим это.

Допустим, что в нем есть отрезок длины $l_3 > 0$. По через p шагов у нас не остается ни одного отрезка длиннее чем $1/2p$; $l_3 > 1/2p$, если p достаточно велико, а значит, такого отрезка быть не может уже после шага с номером p . Ситуация получается парадоксальной — ни одного отрезка нет, а длина есть. Как же тут быть с размерностью?

Наверно, наш читатель прочел все это рассуждение с недоверием. Может быть, авторы решили рассказать ему про экзотический вырожденный случай, которого и в природе-то никогда не бывает. Еще недавно большинство физиков и математиков думали также. Оказалось, однако, что такие множества естественно возникают в задачах, где есть хаос и странные аттракторы. Одним из наиболее наглядных примеров, показывающих типичность этой ситуации, может служить пример, называемый *подковой Смейла*.

Представим отображение участка плоскости в себя, при котором квадрат $ABCD$ переходит в криволинейную фигуру $A'B'C'D'$, изображенную на рис. 47. Для наглядности представим его действие в два этапа. Вначале оно сжимает квадрат в одном и растягивает в другом направлении. На втором этапе полученная полоска складывается в виде подковы. Пусть эта подкова целиком лежит внутри исходной области. Тогда имея перед глазами рисунок, можно попробовать еще раз применить к ней такое преобразование. Читатель может убедиться, что с каждым следующим разом получаемая фигура становится все сложнее. Если расечь ее вертикальной прямой, то сечение будет очень похоже на отрезки, представленные на рис. 46. В пределе они стремятся к канторову множеству.

Подкова Смейла самым тесным образом может быть связана с дифференциальными уравнениями. Рассмотрим для примера систему трех обыкновенных дифференциальных уравнений, связывающих функции $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$. Будем задавать начальные данные, лежащие в одной и той же плоскости $z = z_0$. Из каждой такой точки выпустим фазовую траекторию и посмотрим, где она вновь пересечется с выбранной плоскостью (рис. 48). Координаты

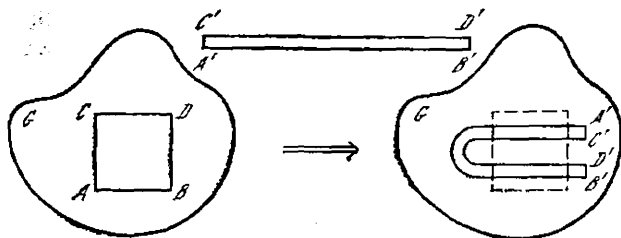
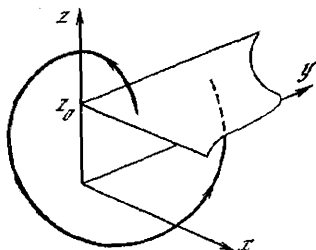


Рис. 47. Отображение участка плоскости в примере Смейла

Пунктиром отмечено положение первоначального квадрата; область G, содержащая его, отображается в себя

Рис. 48. Схема построения отображения Пуанкаре



точки пересечения (x_1, y_1, z_0) зависят от начальных данных (x_0, y_0, z_0) , т. е.

$$x_1 = f(x_0, y_0), \quad y_1 = g(x_0, y_0). \quad (5.1)$$

Функции f и g определяют отображение плоскости $z = z_0$ в себя, которое часто называют отображением Пуанкаре. Как правило, достаточно рассматривать не всю плоскость $z = z_0$, а только небольшую ее часть, которая содержит аттрактор. Именно отображение (5.1) может переводить квадрат в подкову или обладать близкими свойствами.

Это опять приводит к парадоксальному выводу: множество точек, к которому притягиваются хаотические решения, может иметь очень сложную структуру. Например, как у канторова множества. У странного аттрактора с таким свойством есть характерный признак. Сколь бы малую его часть мы ни взяли, она обладает той же структурой. Целое оказывается подобным сколь угодно малой своей части. Поэтому понятие размерности странного аттрактора ввести не так уж просто. Хаос оказывается поразительно интересным объектом!

В частности, можно дать такое определение. Рассмотрим некоторое множество точек в N -мерном пространстве. Возьмем кубики размера ϵ_1 и посчитаем, какое минимальное их число может покрыть все множество. Об-

означим это число n (ε_1). Затем возьмем кубы с размером ε_2 . Окажется, что их нужно n (ε_2). Будем далее уменьшать ребро куба. Предел

$$D = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \log n(\varepsilon) / \log \varepsilon \quad (5.2)$$

называется *фрактальной размерностью* нашего множества. Взяв отрезок, квадрат, кубик, мы получим целые числа 1, 2, 3, что согласуется с нашими интуитивными представлениями. Но для канторова множества размерность оказывается дробной: формула (5.2) дает конкретное число $D = \log 2 / \log 3 = 0.630\dots$ Фрактальная размерность странных аттракторов, как правило, тоже имеет дробную часть.

Определений размерности сейчас существует несколько. То, о котором мы рассказали, относится к так называемым метрическим определениям этого понятия. Кроме них, можно ввести еще вероятностные размерности. Вообще говоря, решение с разной вероятностью бывает в разных точках аттрактора. Определения, учитывающие это, называются вероятностными.

Заполнять аттрактор кубиками и считать величину D непосредственно по формуле (5.2) трудно. Эта задача близка к пределу возможностей современных ЭВМ. Поэтому математики придумали ряд способов, позволяющих оценить размерность через более доступные величины, чем D . Размерность аттрактора сейчас можно вычислять и по данным эксперимента.

В частности, для течения Куэтта—Тейлора это сделала в 1983 г. группа американских ученых. Они нашли число Рейнольдса, при котором возникал хаос и затем увеличивали этот параметр на 30%, вычисляя при этом размерность аттрактора. С ростом числа Рейнольдса эта величина возрастала, но во всех экспериментах не превышала пяти. В реальной физической системе наблюдался маломодовый хаос!

Это очень важный результат. Простейшие математические модели помогают понять, как возникает турбулентность. Они предсказывают ее качественные, а в ряде случаев и количественные характеристики. Постановка и анализ этого и других экспериментов, в которых изучается хаос, привели к формированию новых математических понятий, потребовали широкого использования вычислительного эксперимента.

Выше мы не раз говорили про двухкомпонентные системы, которые используются при описании химических

реакций. Существуют ли в задачах химической кинетики хаос и сложные нестационарные структуры? Единого мнения среди химиков сейчас нет. Одни полагают, что хаос, безусловно, есть. Другие сомневаются в этом или утверждают, что его быть не может. Некоторые ученые сравнивают отношение научного сообщества к «химическому хаосу» с тем, которое еще недавно высказывалось к колебательным реакциям. Уверенность в том, что этого не бывает, мешает многим специалистам объективно оценить экспериментальные факты.

Разумеется, последнее слово остается за убедительными экспериментами. Тем не менее многие сложности связаны с математическим моделированием колебательных реакций и химического хаоса. Даже построение теории реакции Белоусова—Жаботинского, которой занимаются тысячи специалистов, оказалось очень трудной задачей. Дело в том, что механизм реакции сложен. В одной из теорий, например, приводятся два десятка промежуточных реакций и примерно столько же реагентов, обеспечивающих колебательный режим. Скорости этих промежуточных реакций обычно либо неизвестны, либо известны приближенно. Построить содержательную модель на такой основе, учитывая все стадии процесса, не удастся. Приходится делать упрощающие предположения.

Пожалуй, наиболее простой и все же близкой к реальности является система трех дифференциальных уравнений диффузионного типа. Но и ее исследование с помощью современных ЭВМ — дело не легкое. Чтобы упростить ситуацию и не учитывать диффузию, химики стараются иметь дело с реакторами, где вещества хорошо перемешиваются и концентрации можно считать пространственно однородными.

Многие результаты, полученные в таких экспериментах, очень интересны. Исследование реакции Белоусова—Жаботинского показало, что в ней возможны многочастотные режимы и переход к хаосу. Наблюдалось также явление перемежаемости. Важную роль в понимании происходящего, в обработке эксперимента играет теория одномерных отображений. Очень сложное явление и очень простая модель вновь оказываются тесно связаны.

Сейчас появилось много других задач, где интересны хаотические режимы. Ученые установили, что в течение миллионов лет магнитное поле Земли много раз хаоти-

ческим образом меняло свою ориентацию. Оказалось, что в самой простой модели двух вращающихся дисков, магнитные поля которых взаимодействуют, такие режимы тоже есть. Они соответствуют странным аттракторам в некоторой системе трех обыкновенных дифференциальных уравнений (ее сейчас называют моделью динамо Рикитаци).

Еще один пример. Классической задачей физики твердого тела является задача о прохождении электрона через кристаллическую решетку с периодической пространственной структурой. Результат состоит в том, что электрон движется как волна, параметры которой зависят от характеристик кристалла. А теперь допустим, что нам удалось создать хаотическую, нерегулярную решетку. Удивительный результат состоит в том, что движение электрона в этом случае качественно меняется. Он оказывается локализован на определенном участке пространства. При этом сами нерегулярности могут иметь очень малую амплитуду. Важно, чтобы они были хаотичны. Это явление, называемое локализацией Андерсона, имеет большое теоретическое и прикладное значение¹². Создание хаоса оказывается иногда очень полезным.

Некоторые теоретики полагают, что локализация Андерсона может помочь в решении одной из фундаментальных физических задач — проблемы пленения кварков. Эксперименты, проведенные на огромных ускорителях, пока не позволили разбить протоны, электроны, другие элементарные частицы не составляющие их кварки. И сейчас многие физики полагают, что дело не в недостатках эксперимента, а в фундаментальных свойствах материи. Существует предположение, что хаос является неотъемлемым свойством материи на сверхмалых масштабах. Если это так, то пленение кварков и локализация Андерсона могут оказаться близкими явлениями. Видимо, изучение свойств хаоса окажется полезным и во многих других задачах.

В прикладной математике происходит научная революция. Меняются понятия, методы, стратегия исследований. Многие образы, к которым все чаще обращаются теоретики, характерны для нелинейных моделей. Необходимым инструментом исследования становится вычис-

¹² Подробнее об этом рассказывает статья: Андерсон Ф., УФН, 1979, Т. 127, вып. 1, С. 19—39.

лительный эксперимент. Иногда он ложится в основу новых теоретических построений.

Одно из глубоких следствий происходящей революции состоит в том, что математика и изучение природы стали гораздо ближе друг к другу. И даже проведение натуральных экспериментов непосредственно связано с применением компьютеров и разработкой ряда математических методов, которые помогают разобраться в происходящем.

Мы вступаем в новый мир. Мир нелинейных явлений, где возникают неожиданные связи между структурами и хаосом, между динамикой и статистикой, между старыми, привычными и совершенно новыми понятиями. Парадоксы этого мира, которые сегодня известны ученым, видимо, являются только первыми шагами к более глубокому и полному пониманию природы.

ЛИТЕРАТУРА

Если читателя заинтересовали вопросы, затронутые в статье, то более подробно он может познакомиться с ними, пользуясь следующей литературой.

О вычислительном эксперименте:

Самарский А. А. Современная прикладная математика и вычислительный эксперимент // Коммунист. 1983. № 18. С. 31—42.

Самарский А. А., Попов Ю. П. Вычислительный эксперимент. М.: Знание, 1983. 64 с.

Моисеев Н. П. Математика ставит эксперимент. М.: Наука, 1979. 224 с.

О солитонах и методах их исследования:

Бахтангар П. Нелинейные волны в одномерных дисперсных системах. М.: Мир, 1983.

Уилем Дж. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 624 с.

Об основных понятиях теории бифуркаций и их приложениях:

Тер-Крикоров А. М. Нелинейные задачи и малый параметр. М.: Знание, 1984.

Арнольд В. И. Теория катастроф. М.: Знание, 1981; М.: Изд-во МГУ, 1983. 80 с.

Йосс Ж., Джозеф Д. Элементарная теория устойчивости и бифуркаций. М.: Мир, 1983. 300 с.

Гилмор Р. Прикладная теория катастроф. М.: Мир, 1984. Т. 1. 286 с.; Т. 2. 350 с.

Об идеях синергетики:

Романовский Ю. М. Принципы самоорганизации в физике, химии и биологии. М.: Знание, 1981.

Курдюмов С. П., Малинецкий Г. Г. Синергетика — теория самоорганизации: Идеи, методы, перспективы. М.: Знание, 1983. 63 с.

Хакен Г. Синергетика. М.: Мир, 1980. 404 с.

Николис Г., Пригожин И. Самоорганизация в неравновесных системах. М.: Мир, 1979. 512 с.

О важных классах нестационарных диссипативных структур и методах их анализа:

Курдюмов С. П. Собственные функции горения целиковой среды и конструктивные законы построения ее организации // Современные проблемы математической физики и прикладной математики. М.: Наука, 1982.

Дородницын В. А., Еленич Г. Г. Симметрия в решениях уравнений математической физики. М.: Знание, 1984. 64 с.

О свойствах одномерных отображений:

Фейгенбаум М. Универсальное поведение в нелинейных системах // Успехи физ. наук. 1983. Т. 141, вып. 2. С. 343—374.

О нестационарных структурах и диффузионном хаосе вблизи точки бифуркации:

Агромеев Т. С., Курдюмов С. П., Малинецкий Г. Г., Самарский А. А. Двухкомпонентные диссипативные системы в окрестности точки бифуркации // Математическое моделирование: Процессы в нелинейных средах. М.: Наука, 1986. С. 7—59.

О классификации систем типа реакция—диффузия в окрестности точки бифуркации // Итоги науки и техники: Современные проблемы математики: Новейшие достижения. М.: ВИНТИ, 1987. Т. 28. С. 207—313.

О различных сценариях перехода к турбулентности:

Гидродинамические неустойчивости и переход к турбулентности. М.: Мир, 1984. 344 с.

О вычислительном эксперименте, идеях синергетики, ряде парадоксальных свойств нелинейных систем:

Компьютеры, модели, вычислительный эксперимент. М.: Наука, 1988.

СИММЕТРИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ЯВЛЕНИЙ

В. А. ДОРОДНИЦЫН, Г. Г. ЕЛЕНИН

Мир беспорядочно усели упорядоченными формами.

П. Валери

Неистощима фантазия природы, неисчерпаемо многообразие связей между явлениями в окружающем нас мире. Есть в нем связи случайного характера. Они могут возникнуть и не повториться. Каждый миг может принести сюрприз. Тем не менее поведение природы не является полностью случайным, хаотичным и бесструктурным. Наряду с изменчивостью ей присущи стабильность, гармоничность, красота. Регулярность смены времен года, периодичность восходов и закатов, «идеальные» формы кристаллов приводят к мысли об упорядоченности, уравновешенности, целесообразности явлений природы, к мысли о существовании структуры единого мира, к идее симметрии. Идея симметрии пронизывает все области человеческого творчества, играет ведущую роль в чувственном восприятии окружающего мира, в процессе его научного познания.

Понятие симметрии теряет привлекательность и смысл в отрыве от своего антипода — асимметрии. Чересчур симметричное в искусстве вызывает лишь мимолетный интерес, напоминает, скорее всего, схему и производит впечатление мертвой незыблемой красоты, красоты, которой не дано развиваться. В то время как элемент асимметрии заставляет нас почувствовать драматический накал момента, предугадать развитие сцены в будущем.

Единство симметрии и асимметрии пронизывает все явления природы, являясь единством сохранения и изменения, единством порядка и беспорядка, единством закономерного и случайного. Принципы симметрии — это запреты, которые ограничивают число вариантов устройства мира, создают канву его структуры. Асимметрия приводит к разнообразию узоров на заданной канве.

Любая научная классификация основана на одновременном выявлении свойств как симметрии, так и асимметрии классифицируемых объектов. В симметрии проявляется общность свойств, в асимметрии — их различие.

Дать точное определение многоликой идее симметрии невозможно. В каждой конкретной области человеческой

деятельности она принимает свою форму, рождает конкретные методы работы с целостным объектом. В поэзии, музыке, живописи, архитектуре симметрия проявляется в виде законов композиции. В классической механике идея симметрии породила представление об инерциальной системе координат и облачилась в форму принципа относительности. Симметрия нашла свое выражение в запретах на ряд процессов: нельзя построить вечный двигатель, нельзя вытащить себя за волосы из болота на манер барона Мюнхгаузена. Эти запреты называются законами сохранения энергии, количества движения, момента импульса... Еще большую роль играет симметрия в микромире. Принцип неопределенности в квантовой механике предоставляет широкие возможности для проявления симметрии. Эти проявления тем богаче, чем сильнее взаимодействия. Так, при сильных взаимодействиях возникают дополнительные законы сохранения: электрического и барионного зарядов, пространственной, зарядовой и временной четности, странности и изоспина. Хорошо известный принцип В. Паули является порождением симметрии. Идея симметрии лежит в основе классификации элементарных частиц. Фундаментальную роль играет симметрия в физике твердого тела; например, на основе анализа кристаллической решетки можно предсказать, какие вещества дают сегнетоэлектрический эффект или вращают плоскость поляризации. В химии симметрия предстает перед нами прежде всего в виде периодического закона Д. И. Менделеева. Является ли химическая реакция разрешенной или запрещенной — ответ на это определяется симметрией ядерного движения, связывающего реагенты с продуктами. Идея симметрии в биологии принимает форму закона сохранения наследственности Г. Менделя. Наконец, в математике при исследовании операций с элементами множеств произвольной природы симметрия принимает строгий облик группы. Математическая концепция группы была впервые намечена в общих чертах французским математиком Эваристом Галуа (1811—1832) в письме к О. Шевалье. Что поначалу дала теория Э. Галуа математике? Хорошо известным результатом является неразрешимость в радикалах алгебраического уравнения степени выше четвертой. Менее известны запреты на некоторые евклидовы построения. С помощью циркуля и линейки нельзя разрешить следующие задачи: квадратуру круга, трисекцию угла, удвоение куба. В настоящее время теория групп — это разветвленный раздел алгебры.

Такие ее ветви, как теория представлений и теория характеров, лежат в основе современных знаний о твердом теле и мире элементарных частиц.

Итак, искусство и естествознание активно используют фундаментальную идею симметрии для познания окружающего мира. С помощью этой идеи получены важные результаты во многих областях естествознания. Неисчерпаемой теме симметрии посвящено большое число замечательных книг, часть из которых приведена в списке литературы. Тема настоящей статьи — симметрия в решениях уравнений математической физики. Эта тема очень обширна, и поэтому авторы остановились на двух вопросах, характерных для современных математических моделей.

Содержательные математические модели многих физических процессов представляют собой системы уравнений достаточно большой размерности (велико число уравнений). Большая размерность систем уравнений рождает многочисленные трудности при аналитическом и численном исследовании. По этому поводу существует даже выражение «проклятье размерности». Идея симметрии помогает снимать такого рода трудности, делать математическую модель более прозрачной, экономить усилия исследователя. Пример — правила отбора в квантовой механике.

Характерной чертой уравнений, описывающих интенсивные взаимодействия, является нелинейность. Нелинейность уравнений приводит к ряду новых эффектов, не имеющих места в линейных системах. Так, в открытых нелинейных системах могут протекать процессы самоорганизации. Изучение таких явлений сулит новые возможности на пути познания принципов организации живой природы, создания принципиально новых способов интенсивного и экономного производства важнейших продуктов. Сложность изучения нелинейных уравнений связана с тем, что не существует общих рецептов их решения. Симметрия позволяет находить частные так называемые инвариантные решения, например автомодельные. Инвариантные решения содержат богатую информацию о поведении общего решения. В частности, они могут определять финальные формы эволюционного процесса. Например, автомодельные решения уравнений газовой динамики описывают структуру установившихся ударных волн, решения типа «бегущих волн» используются при анализе горения и детонации, а также изучении импульсов, распространяющихся по нервному волокну.

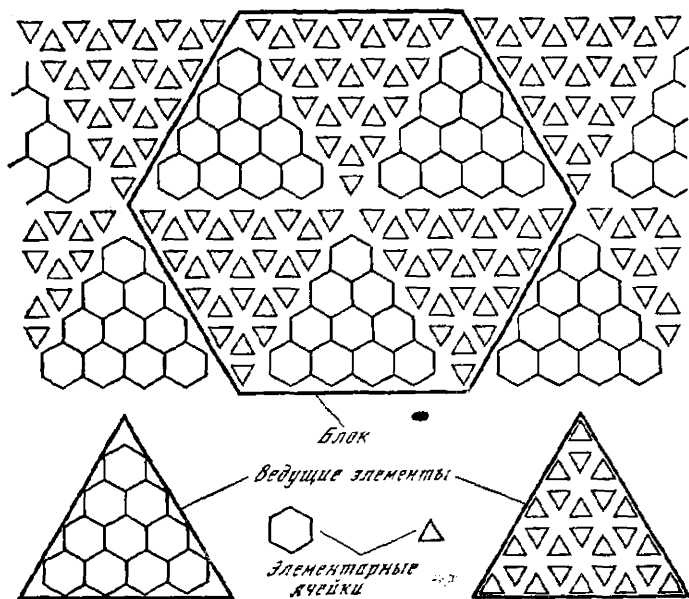


Рис. 1

Симметрия означает упорядоченность частей целого. Чем полезна симметрия при изучении явлений природы? Упорядоченность симметричного объекта позволяет «сжать» информацию о его устройстве. Для овладения симметричным объектом необходимо лишь выделить и запомнить блоки разных уровней и правила их повторяемости. Не пользоваться симметрией — это все равно, что печатать каждый экземпляр данной книги в отдельности, не используя типографский набор.

Уподобим математический объект геометрическому рисунку. Что нужно сделать для того, чтобы запомнить рисунок и повторить его, не глядя на оригинал? Если объект не упорядочен, не обладает симметрией, то каждый его различимый элемент одинаково важен и необходимо запомнить информацию о расположении каждой элементарной единицы. Представьте себе рассыпанный на столе горох.

Другое дело орнамент, например рисунок обоев (рис. 1). В любом орнаменте существует по крайней мере один, сразу бросающийся в глаза блок. Этот блок локализован в пространстве, имеет характерный размер и повторяется

по определенному правилу в целостной картине орнамента. При более пристальном рассмотрении отдельного блока орнамента может оказаться, что он как целое состоит из ведущих элементов, имеющих характерные размеры, другого, более мелкого масштаба. Ведущие элементы могут составлять орнамент блока или располагаться в нем без заметного порядка. Ведущие элементы, в свою очередь, могут быть составлены из еще более мелких хаотически или упорядоченно расположенных элементарных ячеек и т. д.

Сложность орнамента определяется числом уровней и правилами повторяемости частей в целом на каждом уровне. Наблюдая сложный орнамент с «птичьего полета», мы видим одну картину, с расстояния «удобного для чтения» — другую, под микроскопом — третью. Вспомним строки В. Я. Брюсова:

Быть может, эти электроны —
Миры, где пять материков,
Искусства, знанья, войны, троны
И память сорока веков!
Еще, быть может, каждый атом —
Вселенная, где сто планет;
Там все, что здесь, в объеме
сжатом,
Но также то, чего здесь нет.

Человеческое мышление не в состоянии охватить целиком развитие всей Вселенной, решить общую эволюционную задачу развития многообразия структур во Вселенной. И поэтому оно «вырезает» из этой задачи отдельные блоки, заменяя взаимодействие изучаемой структуры с окружающей средой краевыми условиями. И вот что характерно для такого расчленения — оно происходит с минимальной «порчей» симметрии. Кристаллическая друза разбивается на отдельные кристаллики...

В разд. 1 мы познакомим читателя с простейшими математическими объектами, наделенными симметрией. Изучить орнамент и получить решение нелинейных алгебраических уравнений помогает теория симметрических многочленов. На примерах простейших обыкновенных дифференциальных уравнений демонстрируется связь симметрии с возможностью представления решения в виде интегралов. Здесь же определяется и раскрывается содержание основных элементов понятия симметрии: объект, симметрия которого исследуется, преобразования, по от-

ношению к которым он проявляет симметрию, инвариантность (неизменность) свойств объекта, выражающая его симметрию.

В математическом орнаменте блоками являются инварианты, а закон их повторяемости определяется теми преобразованиями, относительно которых инварианты сохраняются. Как найти законы повторяемости и выделить блоки математического орнамента? На этот вопрос читатель получит ответ в разд. 2. В нем же будет показано, как с помощью симметрии получать новые решения из уже известных, как находить инвариантные решения уравнений математической физики.

В разд. 3 рассматриваются простейшие математические модели спонтанного нарушения симметрии в физических и физико-химических системах. Нарушение симметрии приводит к новому пространственно-временному порядку в нелинейной среде. Исследование возникающих диссипативных структур проводится с помощью инвариантных решений, «запас» которых получен во втором разделе методами группового анализа.

Итак, отправимся в мир нелинейных явлений. Путеводной нитью нам будет служить идея симметрии.

1. СИММЕТРИЯ И ПРИМЕРЫ ЕЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ПРИ АНАЛИЗЕ ПРОСТЕЙШИХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ

Симметрия обозначает тот вид согласования или отдельных частей, который объединяет их в единое целое. Красота тесно связана с симметрией.

Г. Вейль. Симметрия

В этом разделе мы будем иметь дело с математическими объектами, хорошо известными широкому кругу читателей: алгебраическими и обыкновенными дифференциальными уравнениями. Алгебраические уравнения встречаются в средней школе. С обыкновенными дифференциальными уравнениями знакомятся студенты первых курсов высших учебных заведений.

Симметрия в алгебраических уравнениях

Не исключено, что читателю приходилось когда-то или, возможно, придется на вступительных экзаменах в вуз иметь дело, допустим с такой задачей:

решить уравнение

$$P_{11}(x) = Ax^{11} + Ax^{10} + Bx^9 + Bx^8 + Cx^7 + Cx^6 + \\ + Cx^5 + Cx^4 + Bx^3 + Bx^2 + Ax + A = 0.$$

Получить ответ в виде формулы поможет симметрия исходного уравнения. Методы, использующие понятие симметрии, позволяют понизить его порядок («сжать» информацию) и решить задачу до конца, несмотря на высокую степень многочленов. Не будь симметрии в этом уравнении — не получить ответ в виде формулы!

Школьнику известна лишь формула решения квадратного уравнения:

$$ax^2 + bx + c = 0, x_{1,2} = (-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac})/(2a),$$

а исходное уравнение имеет одиннадцатую степень. Казалось бы, нет оснований для получения решения в виде формулы. Ведь хорошо известно — это доказал норвежский математик Нильс Абель (1802—1829), — что не существует решения в радикалах алгебраического уравнения общего вида выше четвертой степени. Другими словами, не существует формулы, позволяющей с помощью конечного числа действий сложения, вычитания, умножения, деления, возведения в степень с рациональным показателем определить все корни полинома выше четвертой степени. Вступили ли требования экзаменатора в противоречие с теоремой Абеля? Вовсе нет.

Как и в большинстве школьных задач, ответ в виде формулы в данном случае существует. Найти формулу поможет специальная структура последовательности коэффициентов исходного уравнения.

Структура последовательности коэффициентов определяется зеркальной симметрией: равноудаленные от концов последовательности коэффициенты совпадают. Наличие такой структуры выделяет данный многочлен из множества многочленов одиннадцатой степени и в конечном счете позволяет свести решение задачи к определенному числу квадратных уравнений. Как осуществляется такое понижение порядка? Вспомним общие рассуждения об орнаменте.

Воспользуемся зеркальной симметрией последовательности коэффициентов многочлена $P_{11}(x)$ и сократим наполовину число слагаемых:

$$P_{11}(x) = A(x^{11} + 1) + A(x^9 + 1)x + B(x^7 + 1)x^2 + \\ + B(x^5 + 1)x^3 + C(x^3 + 1)x^4 + C(x + 1)x^5.$$

В каждой скобке можно выделить блок — множитель $(x + 1)$, используя известное равенство

$$x^{2n+1} + 1 = (x + 1)(x^{2n} - x^{2n-1} + x^{2n-2} - \dots - x + 1).$$

Выделив множитель $(x + 1)$ мы понижаем порядок задачи:

$$P_{11}(x) = (x + 1)P_{10}(x),$$

где

$$P_{10}(x) = Ax^{10} + Bx^8 + Cx^6 + Cx^4 + Bx^2 + A.$$

Общее уравнение десятой степени $P_{10}(x) = 0$ неразрешимо в радикалах. Однако $P_{10}(x)$ обладает свойством зеркальной симметрии последовательности коэффициентов

$$ABC | CBA.$$

Зеркальная симметрия последовательности коэффициентов позволяет снова сократить в 2 раза число слагаемых:

$$P_{10}(x) = A(x^5 + 1/x^5)x^5 + B(x^3 + 1/x^3)x^5 + C(x + 1/x)x^5.$$

Исчерпана ли вся симметрия полученного выражения? При первом взгляде бросается в глаза схожесть выражений, заключенных в скобки. Нет ли в этих блоках общего элемента? Анализ выявляет такой элемент: $\alpha = x + 1/x$. Действительно, легко убедиться, что $x^5 + 1/x^5$ и $x^3 + 1/x^3$ являются полиномами от α .

Выделение ведущего элемента α позволяет осуществить очередное упрощение исходного выражения:

$$x^5 + 1/x^5 = \alpha(\alpha^4 - 5\alpha^2 + 5), \quad x^3 + 1/x^3 = \alpha(\alpha^2 - 3), \\ P_{10}(x) = x^5 Q(x) = x^5 \tilde{Q}(\alpha),$$

где

$$\tilde{Q}(\alpha) = A\alpha^4 + (B - 5A)\alpha^2 + (5A - 3B + C).$$

Заметьте, исходное уравнение сведено к биквадратному, которое имеет четыре корня: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$. После определения этих корней осталось решить элементарные уравнения

$$x + 1 = 0; \quad x + 1/x = \alpha_i, \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad x + 1/x = 0,$$

пять из которых квадратные. Решая эти уравнения, мы получаем окончательный ответ. Задача решена до конца.

Исходный многочлен одиннадцатой степени разложен на линейные множители (элементарные ячейки):

$$P_{11}(x) = \prod_{i=1}^{11} (x - x_i).$$

Полностью определен орнамент математического объекта. Успех решения был связан с высокой степенью симметрии исходного многочлена.

Рассмотренный многочлен относится к классу возвратных многочленов. Дадим общее определение. Многочлен

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$$

называется возвратным, если последовательность его коэффициентов обладает зеркальной симметрией: $a_0 = a_n$, $a_1 = a_{n-1}$, ...

Рецепт использования симметрии при работе с возвратными многочленами основан на следующей теореме.

1. Всякий возвратный многочлен нечетной степени $P_{2n+1}(x)$ делится без остатка на $x + 1$, причем частное от деления является возвратным многочленом четной степени $P_{2n}(x)$.

2. Всякий возвратный многочлен четной степени $P_{2n}(x)$ представим в виде $P_{2n}(x) = x^n Q(\alpha)$, где $\alpha = x + 1/x$, а $Q(\alpha)$ — многочлен степени n .

С помощью этой теоремы задачу о нахождении корней многочлена степени $2n + 1$ можно свести к той же задаче для многочлена степени n . Это и было сделано.

Методы, использующие идею симметрии, помогают решать не только школьные задачи. Они находят применение при решении важных практических задач. Остановимся на одном примере, относящемся к моделированию гетерогенно-каталитических процессов в неидеальных системах.

Многие важные химические реакции происходят в газовой фазе либо с низкой скоростью, либо с низким выходом полезных продуктов. Осуществление реакции на поверхности катализатора, обладающего нужными свойствами, позволяет ускорить реакцию и повысить выход полезных продуктов. Поэтому гетерогенный катализ в настоящее время составляет основу химического производства. Оптимизация проведения каталитических реакций невозможна без детальных знаний о взаимодействии атомов и молекул на поверхности катализатора. Такие знания могут быть получены со всей полнотой на пути

сбалансированного сочетания средств натурального эксперимента и математического моделирования на ЭВМ.

Основу широкого класса неидеальных моделей, учитывающих взаимодействие адсорбированных частиц, составляет система дифференциальных алгебраических уравнений следующего вида:

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \mathcal{F}_i(\theta_1, \dots, \theta_s, g_{11}, \dots, g_{ss}, \alpha), \quad i = \overline{1, s-1}, \quad (1)$$

$$g_{ij}g_{ss} = r_{ij}g_{is}g_{js}, \quad i, j = \overline{1, s-1}, \quad (2)$$

$$\sum_{j=1}^s g_{ij} = \theta_i, \quad \sum_{j=1}^s \theta_j = 1, \quad i = \overline{1, s},$$

где r_{ij} — симметрическая матрица размерности $s \times s$, описывающая взаимодействие между частицами, адсорбированными поверхностью катализатора; α — вектор параметров, к которым, в частности, относятся температура поверхности катализатора и парциальные давления компонент газовой фазы; θ_i, g_{ij} — неизвестные, подлежащие определению, число которых равно $s + s^2$; $s - 1$ — число компонент газовой фазы.

Отметим, что при отсутствии взаимодействий ($r_{ij} = 1$) так называемая идеальная модель содержит всего $s - 1$ уравнение:

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \mathcal{F}_i\left(\theta_1, \dots, 1 - \sum_{j=1}^{s-1} \theta_j, \theta_1^2, \dots, \left(1 - \sum_{j=1}^{s-1} \theta_j\right)^2, \alpha\right),$$

$$i = \overline{1, s-1}. \quad (3)$$

Хорошо известны трудности математического моделирования гетерогенно-каталитических процессов на основе идеальных моделей. Трудности обусловлены в основном нелинейностью и большой размерностью систем уравнений, сильным различием характерных времен протекания различных стадий процесса. В случае моделей, эффективно учитывающих взаимодействие на микроуровне, трудности возрастают. Существенным образом усиливается нелинейность, возрастает размерность уравнений, появляется большое число дополнительных внутренних параметров модели, учитывающих взаимодействие между частицами различных сортов.

Для создания надежных и эффективных алгоритмов решения такого рода задач необходимо использовать весь арсенал математических средств. Остановимся всего лишь

на одном круге вопросов. Как избавиться от «проклятия размерности» в рассматриваемой математической модели? Нельзя ли уменьшить число неизвестных в неидеальной модели? Получить положительный ответ на интересующие нас вопросы можно, если использовать симметрию подсистемы алгебраических связей (2).

Основная идея заключается в том, чтобы ввести новые переменные y_i , $i = \overline{1, s-1}$, для которых нелинейные связи удовлетворяются тождественно, а линейные определяют зависимость между новыми переменными и искомыми неизвестными θ_i , g_{ij} . Методы, использующие идею симметрии дают не единственное решение. Остановимся лишь на одном возможном варианте новых переменных.

Если y_i введены так, что справедливы равенства

$$g_{ss} = \Psi_s^2 \Psi^{-1}, \theta_s = \Psi_s \Psi^{-1}, g_{is} = y_i \Psi_s \Psi^{-1}, \theta_i = y_i \Psi_i \Psi^{-1},$$

$$g_{ij} = y_i y_j r_{ij} \Psi^{-1}, \Psi = 1 - \sum_{i=1}^{s-1} \sum_{j=1}^{s-1} (1 - r_{ij}) y_i y_j,$$

$$\Psi_s = 1 - \sum_{i=1}^{s-1} y_i, \Psi_i = 1 - \sum_{j=1}^{s-1} y_j (1 - r_{ij}), 0 \leq y_i \leq 1,$$

$$i = \overline{1, s-1},$$

то в переменных y_i исходная система уравнений принимает вид:

$$\frac{d}{dt} (y_i \Psi_i \Psi^{-1}) = F_i (y_s, \dots, y_{s-1}). \quad (4)$$

Система (4) содержит всего лишь $s-1$ уравнение, т.е. столько, сколько их у идеальной модели (3).

Итак, использование симметрии привело к неулучшаемому понижению размерности системы уравнений (1), (2). Вместо исходных $s + s^2$ уравнений надо решать всего лишь $s-1$. Для систем с большим числом неизвестных выигрыш существенный. Так, для системы, содержащей всего десять компонент, надо решать десять уравнений, а не сто тридцать два. Время расчетов на ЭВМ сокращается на порядок.

А сейчас от алгебраических систем перейдем к обыкновенным дифференциальным уравнениям.

Симметрия

в обыкновенных дифференциальных уравнениях

Симметрия позволяет упростить процесс решения не только алгебраических уравнений. Методы, использующие идею симметрии, давно и с успехом применяются

при исследовании обыкновенных дифференциальных уравнений. Рассмотрим дифференциальное уравнение первого порядка

$$dy/dx = F(x, y), \quad (5)$$

в котором функция двух переменных $F(x, y)$ определена в некоторой области G плоскости x, y . Неизвестной является зависимость между переменными x и y . Запись (5) определяет в области G однопараметрическое семейство интегральных кривых $\Psi(x, y, c) = 0$ (здесь c — параметр семейства, «номер» интегральной кривой), таких, что в каждой точке p тангенс угла наклона касательной равен значению функции F в этой точке.

Уравнение (5) является основой математических моделей многих процессов, происходящих в природе. Сюда относятся, например, истечение жидкости из сосуда, растворение, рост бактерий, радиоактивный распад и многие другие процессы. В зависимости от целей математического моделирования для уравнения (5) ставится определенная задача. Например, задача Коши: найти интегральную кривую, удовлетворяющую уравнению (5) и проходящую через заданную точку x_0, y_0 плоскости (x, y) .

Значение параметра c находится с помощью дополнительной информации, содержащейся в условии задачи. Для определения c решают уравнение $\Psi(x_0, y_0, c) = 0$, если, конечно, известен явный вид функции $\Psi(x, y, c)$.

Сразу же отметим, что подавляющее большинство дифференциальных уравнений невозможно решить в известных элементарных функциях, в то время когда известно, что уравнение имеет решение. Эта ситуация имеет общий характер. Единственным конструктивным способом отыскания решения задачи для дифференциальных уравнений общего вида является вычислительный алгоритм. Однако перед численным решением задач всегда следует провести исследования с помощью качественной теории.

Вернемся к основной теме и рассмотрим несколько примеров «простой» структуры правой части уравнения (5). Наша цель — показать связь «простоты» с симметрией и возможностью представления решения в виде интеграла. Математики говорят, что в этом случае уравнение интегрируется в квадратурах.

Пусть правая часть уравнения (5) зависит лишь от независимой переменной x и не зависит от y :

$$dy/dx = F(x). \quad (6)$$

В этом случае решение уравнения представимо в виде

$$y = \int_0^x f(\xi) d\xi + c. \quad (7)$$

Как связана возможность представления решения в виде квадратуры с симметрией уравнения (6)? Если мы в (6) вместо y подставим $y^* = y + a$, где a — произвольная постоянная, то правая часть (6) не изменится. Другими словами, преобразование $y^* = y + a$, $x^* = x$ не меняет правую часть уравнения (6). При этом преобразовании не меняется и левая часть уравнения. Действительно, $dy^* = dy$, $dx^* = dx$, $dy^*/dx^* = dy/dx$. Мы столкнулись с простейшим свойством симметрии дифференциального уравнения: уравнение (6) инвариантно относительно преобразования сдвига. При таком преобразовании всякая интегральная кривая уравнения (6) может быть получена из любой интегральной кривой того же уравнения сдвигом вдоль оси y . Иначе говоря, преобразование сдвига переводит одно решение уравнения в другое его решение.

Рассмотрим чуть более сложное уравнение

$$dy/dx = F(\alpha x + \beta y), \quad (8)$$

где $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$ — заданные постоянные. Правая часть (8) зависит от комбинации $\alpha x + \beta y$ как «единого целого», поэтому если мы сделаем сдвиг по x и y согласованно, так, чтобы $\alpha x^* + \beta y^* = \alpha x + \beta y$, то уравнение (8) останется неизменным (величина производной dy/dx не меняется при преобразовании сдвига).

Представим преобразование сдвига в виде $y^* = y + a$, $x^* = x + b$, тогда из условия неизменности величины $\alpha x + \beta y$ легко получить, что $\alpha a = -\beta b$, или $b = -(\alpha/\beta)a$, где a может быть произвольной величиной.

Инвариантность (как мы теперь видим, это и есть проявление симметрии) уравнения (8) относительно преобразования $y^* = y + a$, $x^* = x - (\alpha/\beta)a$ связана с возможностью представления решения в виде квадратуры. Действительно, сделав замену переменных $z(x) = \alpha x + \beta y(x)$, получим уравнение $dz/dx = \alpha + \beta F(z)$. Переменные x и z разделяются: $dx = \frac{dz}{\alpha + \beta F(z)}$. Проинтегрировав обе части этого уравнения (если это возможно) и вернувшись к переменной y , получаем решение в виде

формулы. Выражение $z = \alpha x + \beta y$ является «блоком в орнаменте» данного математического объекта.

Рассмотрим уравнение

$$dy/dx = F(y/x). \quad (9)$$

Как и в предшествующем примере, правая часть уравнения (9) зависит от двух переменных x и y . Можно ли в нем также выделить блок? Таким блоком является выражение y/x . Вводя новую переменную $z(x) = y(x)/x$, получаем уравнение с «разделяющимися» переменными

$$dx/x = dz/(F(z) - z).$$

Его решение представимо в виде квадратуры.

Попробуем угадать преобразования, не меняющие уравнение (9). Из вида правой части ясно, что одинаковое растяжение переменных x и y ($y^* = ay$, $x^* = ax$) не меняет правую часть. Дифференциалы переменных x и y подвергнутся растяжению $dy^* = a dy$, $dx^* = a dx$, а производная останется неизменной: $dy^*/dx^* = dy/dx$. Иными словами, указанное преобразование растяжения переменных переводит уравнение (9) в точно такое же уравнение $dy^*/dx^* = F(y^*/x^*)$. В этом случае говорят, что уравнение инвариантно относительно указанных преобразований или что оно допускает эти преобразования.

Читатель уже, наверное, заметил, что в каждом примере с целью представления решения в виде квадратуры мы делаем замену переменных (выделяем блок), причем в качестве новой переменной выбираем такую величину, которая не меняется при преобразованиях, допускаемых дифференциальными уравнениями. Такие величины называются инвариантами.

Инвариантом для уравнения (8) при преобразовании «согласованного» сдвига оказалась величина $z = \alpha x + \beta y$; инвариантом для уравнения (9) при преобразовании растяжения $y^* = ay$, $x^* = ax$ — величина y/x .

Найти инвариант для уравнения при известных преобразованиях несложно. Надо исключить произвольную постоянную и привести полученное равенство к такому виду, когда «новые» переменные x^* , y^* стоят с одной стороны равенства, а «старые» x , y — с другой.

Во всех рассмотренных нами примерах преобразования, допускаемые уравнениями, были угаданы. Это оставляет известное чувство неудовлетворения. Как, на-

пример, догадаться, что уравнение $\frac{dy}{dx} x(y + \ln x) = y$ допускает преобразование

$$y^* = y, \quad x^* = x \exp(ay)?$$

Связь инвариантности дифференциальных уравнений относительно преобразований переменных (это качество часто называют симметрией дифференциальных уравнений) с их интегрируемостью была замечена давно. Построить теорию преобразований, теорию, вылившуюся в целый раздел математики, удалось выдающемуся норвежскому математику Софусу Ли (1842—1899). С. Ли использовал для этих целей понятие группы. Синтез алгебраических идей с идеями анализа привел С. Ли (его работы относятся к последней трети прошлого века) к созданию теории, называемой сейчас теорией групп Ли.

Теория непрерывных групп (групп Ли) представляет собой широкое направление в математике. Она оказала глубокое влияние на развитие теории дифференциальных уравнений, алгебры, оснований геометрии, топологии и теоретической физики. Здесь нас будет интересовать круг идей, связанных с применением групп Ли к дифференциальным уравнениям, то, что называется сейчас групповым анализом дифференциальных уравнений.

Помимо всего прочего, С. Ли был разработан новый математический аппарат — аппарат бесконечно малых (инфинитезимальных) преобразований. Анализ бесконечно малых преобразований можно вполне сравнить с разработанным Ньютоном анализом «бесконечно малых», т. е. дифференциальным исчислением.

Работы С. Ли трудно оценить. Как метко заметил один советский математик, положение напоминает ситуацию в геологоразведке: искали золото, а нашли нефть. Общую теорию интегрирования произвольных систем дифференциальных уравнений создать не удалось, однако результаты превзошли все ожидания. И не пытаюсь оценить значение работ С. Ли, заметим, что их перевод на русский язык и издание были бы актуальны и сейчас.

2. ИНВАРИАНТНОСТЬ ПРИ ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ — УНИВЕРСАЛЬНЫЙ ОБРАЗ СИММЕТРИИ

Всякий раз, когда вам приходится иметь дело с некоторым объектом, наделенным структурой, попытайтесь определить... преобразования, оставляющие без изменения все структурные соотношения. Вы можете рассчитывать на то, что на этом пути вам удастся глубоко проникнуть во внутреннее строение объекта.

Г. Вейль. Симметрия

В этом разделе излагаются некоторые элементы теории групп Ли преобразований. Существуют и другие определения симметрии и методы ее использования, однако в отличие от них методика С. Ли обладает универсальностью. Она применима к любым системам независимо от вида нелинейности, числа уравнений, порядка производных и поэтому заслуживает особого внимания.

Центральными понятиями этого раздела являются «локальная однопараметрическая группа», «инфинитезимальный оператор», «инвариант». С помощью понятий «группа» и «инфинитезимальный оператор» удастся установить ведущие элементы в орнаменте математического объекта. Такими ведущими элементами являются инварианты. При этом законы повторяемости ведущих элементов в орнаменте описываются группой преобразований.

Однопараметрическая непрерывная группа преобразований

Нам просто представить движение любого предмета в трехмерном пространстве, в котором мы живем. Школьник легко оперирует понятиями «вектор», «луч», «траектория точки», «непрерывность», «координаты». Здесь нам понадобится пространство N измерений (трех мало), в котором точка x имеет N координат, т. е. $x = (x^1, x^2, x^3, \dots, x^N)$.

Рассмотрим преобразование точек E^N (N -мерное евклидово пространство), переводящее каждую точку $x \in E^N$ с координатами (x^1, x^2, \dots, x^N) в точку $x^* \in E^N$ с координатами $(x^{1*}, x^{2*}, \dots, x^{N*})$. Пусть это преобразование задано в виде

$$x^* = f(x, a). \quad (10)$$

Здесь x^* и f — N -мерные векторы, которые далее выделять не будем, или покомпонентно $x^{i*} = f^i(x^1, x^2, \dots, x^N, a)$, $i = 1, \dots, N$, где f^i — гладкие функции; a — некоторый параметр (вещественное число). Обозна-

чим такое преобразование через T_a : $T_a x = x^*$. Заданием формулы (10) мы определили целое семейство (множество) преобразований. При фиксированных f^i разные значения параметра a дают разные преобразования. Будем считать преобразования обратимыми, т. е. для каждого преобразования T_a найдется обратное ему T_a^{-1} , возвращающее точку x^* на прежнее место x : $x = T_a^{-1} x^*$ для любой точки x .

Для преобразований T_a определим операцию умножения или суперпозицию. Последовательное применение преобразований T_a и T_b называется операцией умножения преобразований. Формула $x^{**} = T_b \cdot T_a x$ означает результат действия на точку x некоторого преобразования T_a , а затем T_b . Предполагается, что операция умножения преобразований ассоциативна, так же как ассоциативно умножение обычных чисел:

$$T_a (T_b T_c) = (T_a T_b) T_c.$$

В качестве простого «бытового» примера, иллюстрирующего это важное понятие, вспомните ваше движение по лестнице. Пусть каждый шаг по ступенькам — это «преобразование», перемещающее вас в пространстве. Тогда ясно, что вы попадаете в одно и то же место, если сначала сделаете шаг через две ступеньки, а потом поднимитесь еще на одну или сделаете это наоборот — сначала на одну, а потом — на две. Об этом и говорит условие ассоциативности. Но здесь мы рассматриваем непрерывные преобразования, а движение по лестнице — дискретное, вы не можете подняться, скажем, на полторы ступеньки. Представьте теперь тоже самое движение, но на эскалаторе. Такое движение также обладает ассоциативностью, но теперь уже есть непрерывность преобразования. Есть и аналог параметра — в качестве него можно выбрать, например, расстояние, на которое вы переместились, стоя на эскалаторе.

Но вернемся к более строгим понятиям, которые нам понадобятся для дальнейшего.

Дадим теперь основное определение этого раздела. Пусть параметр a , являющийся «управляющим» в семействе преобразований $x^* = f(x, a)$, изменяется в некотором интервале Δ вещественной оси.

Семейство преобразований $\{T_a\}$ называется *локальной однопараметрической группой Ли преобразований*, если

1) в интервале Δ существует единственное значение параметра a_0 , такое, что T_{a_0} — тождественное преобразо-

вание, т. е. точки x остаются на месте:

$$x = T_{a_0}x;$$

2) существует окрестность точки a_0 , такая, что для любых a, b из этой окрестности

$$T_a T_b = T_c, \quad T_c \in \{T_a\},$$

где $c = c(a, b)$ — достаточно гладкая функция;

3) для любого параметра a из окрестности a_0 существует значение параметра $b = a^{-1}$, такое, которое дает обратное к T_a преобразование $(T_a)^{-1} = T_{a^{-1}}$. Однопараметрическую группу будем обозначать G_1 .

«Глазное» групповое свойство (оно называется локальной замкнутостью относительно умножения) состоит в следующем. Пусть на некоторую точку x действует преобразование

$$T_a : x^* = f(x, a).$$

Подействуем на x^* преобразованием T_b :

$$x^{**} = f(x^*, b) = f(f(x, a), b).$$

В результате мы получили суперпозицию преобразований T_a и T_b . Функции f^i порождают группу Ли преобразований. Это означает, что выражение $f(f(x, a), b)$, зависящее от двух параметров, можно преобразовать к виду $f(x, c)$ с некоторым значением уже одного параметра $c = c(a, b)$ (рис. 2). Группы преобразований присутствуют всюду, где можно вместо двух шагов сделать один, как в нашем примере с лестницей. Группы Ли — это непрерывные движения (вспомните эскалатор), у которых есть тождественное преобразование (эскалатор стоит), а произведение и обращение преобразований определены лишь для преобразований, достаточно близких к тождественному, — поэтому во всех определениях присутствует слово «локальный». Оказывается, в любой однопараметрической группе G_1 можно так ввести параметр a , что $c(a, b) = a + b$. (Пример такой замены параметра будет дан ниже.) Из этого следует перестановочность преобразований: $T_b T_a = T_{a+b} = T_{b+a} = T_a T_b$. Таким образом, группа — это множество преобразований с операцией, наделенной «хорошими свойствами».

Приведем простейшие примеры группы G_1 .

1. Операция переноса (сдвиг) на множестве вещественных чисел; $x^* = x + a$, здесь $N = 1$, $\Delta = (-\infty, +\infty)$.

$x^* = x + (a + b)$, $c = a + b$. При $a = 0$ получаем тождественное преобразование.

2. Операция растяжения на вещественной оси:

$$x^* = e^a x, \quad \Delta = (-\infty, +\infty), \quad a_0 = 0, \quad N = 1.$$

3. Вращение (поворот) плоскости (x, y) :

$$x^* = x \cos a - y \sin a,$$

$$y^* = x \sin a + y \cos a,$$

$$\Delta = (-\pi, \pi), \quad a_0 = 0, \quad N = 2.$$

Приведем пример преобразования, не образующего группу Ли: $x^* = x + a$, $y^* = y + a^2$. Легко убедиться, что здесь нарушено главное групповое свойство.

Итак, мы знаем, в каких случаях преобразования $x^{i*} = f^i(x, a)$ задают локальную группу Ли преобразо-

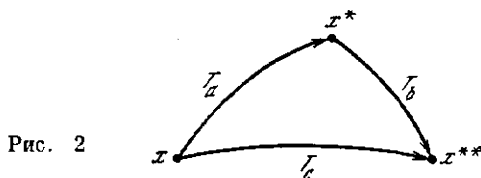


Рис. 2

ваний. Введем теперь некоторые вспомогательные функции

$\xi^i(x) = \left. \frac{\partial f^i(x, a)}{\partial a} \right|_{a=0}$, однозначно вычисляемые по

$f^i(x, a)$. Функции $\xi^1(x)$, $\xi^2(x)$, ..., $\xi^N(x)$ можно рассматривать как вектор $\xi(x)$. Он называется касательным векторным полем. (Почему он так называется, станет ясным чуть позже.) Рассмотрим систему N уравнений (уравнения Ли):

$$df^i/da = \xi^i(f), \quad i = 1, \dots, N, \quad (11)$$

с начальными условиями

$$f^i|_{a=0} = x^i. \quad (12)$$

Обратим внимание, что функции ξ^i определяются не в точке x , а в точке $f(x, a)$. Система (11) — система обыкновенных дифференциальных уравнений, x^i — являются ее параметрами, $f = f(x, a)$ — решением.

Для задачи (11), (12) справедлива теорема С. Ли: функции $f^i(x, a)$, задающие группу G_1 , удовлетворяют уравнениям (11) с начальными условиями (12), и обратно, для любых (достаточно гладких) функций $\xi^i(x)$ решение $f^i(x, a)$ задачи (11), (12) определяет группу G_1 .

Эта теорема утверждает взаимно-однозначную связь группы G_1 , заданной формулами преобразований $x^{i*} = f^i(x, a)$ с набором функций $\xi^i(x)$: $G_1 \leftrightarrow \{\xi^i(x)\}$. Из этого, в частности, следует, что локальную группу Ли преобразований строить очень просто — надо заготовить любым набором функций $\xi^i(x)$ и, решив задачу (11), (12) (как правило, это просто сделать), найти функции $f^i(x, a)$, задающие преобразования точек x^i . Пусть, например, ξ^i представляют собой набор констант: $\xi = (\lambda^1, \lambda^2, \dots, \lambda^N)$, $\lambda^i = \text{const}$. Уравнения Ли будут таковы:

$$df^i/da = \lambda^i, \quad f^i|_{a=0} = x^i, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Решение очевидно: $f^i(x, a) = x^i + \lambda^i a$. Найденные по $\xi^i \equiv \lambda^i$ преобразования $x^{i*} = x^i + \lambda^i a$ в E^N представляют собой перенос вдоль вектора $\lambda = (\lambda^1, \lambda^2, \dots, \lambda^N)$.

Смысл соответствия $\{\xi^i(x)\} \leftrightarrow G_1$ означает следующее. Под действием преобразования $T_a: x^* = f(x, a)$ при изменении параметра a точка x описывает некоторую траекторию. Теорема С. Ли говорит о том, что для описания этой траектории достаточно знать касательную в начальной точке x (рис. 3).

Вместо набора функций $\xi^i(x)$, задающих группу преобразований G_1 , воспользуемся линейным дифференциальным оператором:

$$X = \sum_{i=1}^N \xi^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Для сокращения записи знак суммы мы будем, как это всегда делается, опускать, подразумевая суммирование по повторяющимся индексам. Например, введенный оператор будем писать так: $X = \xi^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}$. Этот оператор, называемый *инфинитезимальным оператором группы* G_1 , взаимно-однозначно связан с функциями $\xi^i(x)$ (которые называются его координатами), а значит, и с группой G_1 : $G_1 \leftrightarrow X$. Приведем примеры вычисления операторов X по формулам преобразований.

1. Преобразование переноса в E^N вдоль вектора $(\lambda^1, \dots, \lambda^N)$:

$$x^{i*} = x^i + \lambda^i a, \quad i = 1, \dots, N,$$

$$\xi^i(x) = \lambda^i, \quad X = \lambda^i \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

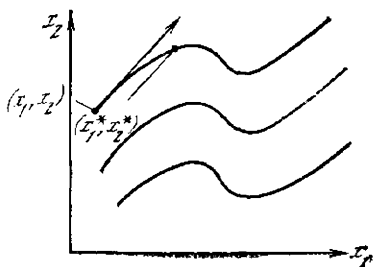


Рис. 3

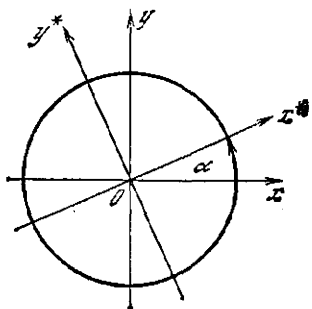


Рис. 4

2. Преобразование растяжения в E^N :

$$x^{i*} = e^{\lambda^i a} x^i, \quad \lambda^i = \text{const},$$

$$\xi^i(x) = \lambda^i x^i, \quad X = \lambda^i x^i \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

3. Вращение в плоскости (x, y) :

$$x^* = x \cos a - y \sin a,$$

$$y^* = x \sin a + y \cos a,$$

$$\xi^1 = -y, \quad \xi^2 = x, \quad X = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}.$$

Читатель без труда нарисует картинки для иллюстрации преобразований, фигурирующих в первых двух примерах при $N = 2$, т. е. преобразования в плоскости.

Также очевидна и картинка для третьего примера (рис. 4).

Упомянутая замена, приводящая однопараметрическую группу в группу переносов, для группы вращений, как легко догадаться, — это переход в полярные координаты $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\varphi = \text{arc tg}(y/x)$. После такой замены преобразование группы будет $r^* = r$, $\varphi^* = \varphi + a$, а оператор $X = \partial/\partial\varphi$.

Инварианты группы преобразований

Мы рассматриваем преобразования $T_a : x^* = f(x, a)$, действующие на точки пространства E^N . Пусть теперь задана некоторая функция $F(x) = F(x^1, \dots, x^N)$. Как изменяется функция $F(x)$, когда точка x подвергается преобразованию T_a ? По определению полагают $T_a F(x) =$

$= F(T_a x)$, т. е. действие T_a распространяется на аргумент функции $F(x)$. Функция $F(x^*)$ зависит не только от x , но и от группового параметра a . Ее производная по a в точке $a = 0$ (напомним, что $\xi^i(x) = \left. \frac{\partial x^{i*}}{\partial a} \right|_{a=0}$) равна:

$$\frac{d}{da} T_a F(x) \Big|_{a=0} = \frac{\partial F(x^*)}{\partial x^{i*}} \frac{\partial x^{i*}}{\partial a} \Big|_{a=0} = \xi^i(x) \frac{\partial F(x)}{\partial x^i} = X F(x).$$

Аналогично получим выражение для n -й производной от $F(x)$ (при достаточной гладкости $F(x)$):

$$\frac{d^{(n)} F(x^*)}{da^{(n)}} \Big|_{a=0} = X^{(n)} F(x),$$

где $X^{(n)}$ — это инфинитезимальный оператор, примененный n раз. Значит, главная линейная часть изменения $F(x)$ при преобразованиях $T_a \in G_1$ в точке $a = 0$ определяется оператором X :

$$F(x^*) - F(x) = (X F(x)) a + 0(a).$$

Этот оператор потому и называется *инфинитезимальным*, что он дает *бесконечно малое* преобразование. Функция $F(x)$ называется *инвариантом* группы G_1 , если она не меняется под действием любого преобразования $T_a \in G_1$, т. е.

$$F(T_a x) = F(x).$$

Проверять это условие для достаточно сложных функций $F(x)$ и преобразований $x^* = f(x, a)$ очень неудобно. Оказывается, что *критерий инвариантности функции* $F(x)$ выглядит очень просто при использовании оператора группы X . Необходимым и достаточным условием инвариантности функции $F(x)$ является следующее: $X F(x) = 0$. Это — линейное уравнение в частных производных первого порядка:

$$\xi^i(x) \frac{\partial F}{\partial x^i} = 0.$$

Известно, что у него существует $N - 1$ функционально независимое решение: $F(x) = I^\tau(x)$, $\tau = 1, 2, \dots, N - 1$. Ясно, что если взять любую дифференцируемую функцию $I = \Phi(I^1, I^2, \dots, I^{N-1})$, то величина I тоже будет инвариантом. Таким образом, набор инвариантов $I^1(x), \dots, I^{N-1}(x)$ определяется неоднозначно,

их можно комбинировать и выбирать наиболее «удобную форму». Заметим еще, что критерий инвариантности $XF = 0$ представляет собой равенство нулю скалярной величины, не меняющейся при переходе к другой системе координат.

Приведем примеры построения инвариантов группы G_1 .

1. Преобразование переноса вдоль вектора $(\lambda^1, \dots, \lambda^N)$: $x^{i*} = x^i + \lambda^i a$. Для нахождения инвариантов можно решать уравнение $\lambda^i \frac{\partial F(x)}{\partial x^i} = 0$, но мы воспользуемся уже знакомым нам приемом из разд. 1 — исключим из формул конечных преобразований параметр a :

$$(x^{i*} - x^i)/\lambda^i = (x^{(i+1)*} - x^{i+1})/\lambda^{i+1}, \quad i = 1, \dots, N-1.$$

Отсюда ясен вид инвариантов:

$$I^i = x^{i+1}/\lambda^{i+1} - x^i/\lambda^i, \quad i = 1, \dots, N-1.$$

2. Для преобразования вращения в плоскости (x, y) с оператором $X = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}$ можно догадаться, что инвариантом ($N-1=1$) будет величина $I = x^2 + y^2$.

Пусть теперь в E^N задано некоторое множество точек с помощью уравнений $\Phi_\alpha(x) = 0$, $\alpha = 1, \dots, A$, которое мы будем называть *многообразием* и обозначать буквой \mathfrak{M} . Ясно, что если это многообразие задается с помощью инвариантов $I^\alpha(x)$ группы G_1 :

$$\Phi_\alpha(I^1(x), \dots, I^{N-1}(x)) = 0,$$

то оно будет *инвариантным относительно G_1 многообразием*, т. е. любая точка x , принадлежащая этому многообразию, под действием любого преобразования $T_a \in G_1$ переходит в точку того же многообразия. Примеры таких инвариантных многообразий читатель найдет без труда. А как быть, если многообразие не задано с помощью инвариантов группы G_1 ? Оказывается, что в этом случае критерий инвариантности многообразия \mathfrak{M} : $\Phi_\alpha(x) = 0$, $\alpha = 1, \dots, A$, тоже очень просто выражается с помощью оператора группы G_1 :

$$X\Phi_\alpha(x) \big|_{\mathfrak{M}} = 0, \quad \alpha = 1, \dots, A.$$

Смысл этого требования ясен — бесконечно малое перемещение точек многообразия должно равняться нулю. Поскольку это условие и достаточно и *необходимо*, то его можно использовать для нахождения группы преобразований, допускаемой некоторой системой алгебраиче-

ских уравнений. Действительно, если нам задана конкретная система уравнений $\Phi_\alpha(x) = 0$, то, записав критерий инвариантности с неизвестными нам координатами $\xi^i(x)$ оператора X :

$$\xi^i(x) \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial x^i} \Big|_{\Phi_\alpha=0} = 0, \quad \alpha = 1, \dots, A,$$

и решив эти уравнения относительно $\xi^i(x)$, мы найдем допустимый оператор X , т. е. группу G_1 .

Приведенный критерий инвариантности многообразия — основа техники группового анализа, с помощью которой отыскивается группа преобразований, допускаемая той или иной системой уравнений.

Если система уравнений $\Phi_\alpha(x) = 0$ задана с помощью инвариантов группы G_1 , то, очевидно, эта система задает некоторое инвариантное многообразие в E^N . Оказывается, в некотором смысле верно и обратное: если $\Phi_\alpha(x) = 0$ задает инвариантное гладкое многообразие, то оно может быть представлено через инварианты группы G_1 , т. е. его можно записать в виде $\tilde{\Phi}_\alpha(x) = 0$, где $\tilde{\Phi}_\alpha(x)$ — инварианты G_1 . Эта теорема об инвариантном представлении инвариантных многообразий представляет собой центральный момент при использовании свойств симметрии, рассматриваемой, например, при построении инвариантных решений, о которых речь пойдет ниже.

Группы преобразований, допускаемые дифференциальными уравнениями

Чтобы перейти к изучению симметрии дифференциальных уравнений относительно рассматриваемых преобразований, нам нужно знать, как меняются производные функций при таких преобразованиях.

Пусть в E^N координаты некоторой точки делятся на «независимые» x^i , $i = 1, \dots, n < N$, и «зависимые» (или дифференциальные) переменные u^k , $k = 1, \dots, m$, $m + n = N$.

Пусть задана группа G_1 преобразований вида $x^{i*} = f^i(x, u, a)$, $u^{k*} = g^k(x, u, a)$ с оператором

$$X = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \eta^k \frac{\partial}{\partial u^k}, \quad i = 1, \dots, n; \quad k = 1, \dots, m.$$

Введем новые величины — частные производные от u^k :

$$u_i^k = \frac{\partial u^k}{\partial x^i}, \quad i = 1, \dots, n; \quad k = 1, \dots, m.$$

Пространство $E^{\tilde{N}}$, $\tilde{N} = N + mn$ называется продолженным (по отношению к E^N) пространством. В нем точка имеет координаты (x^i, u^k, u_i^k) . Продолженная группа преобразований \tilde{G}_1 отличается от исходной группы G_1 наличием дополнительных формул для преобразования производных:

$$u_i^{k*} = \psi_i^k(x^i, u^k, u_i^k, a), \quad i = 1, \dots, n; \quad k = 1, \dots, m.$$

Продолженный оператор группы \tilde{G}_1 будет иметь вид:

$$\tilde{X} = X + \zeta_i^k \frac{\partial}{\partial u_i^k}, \quad \text{где } \zeta_i^k = \left. \frac{\partial \psi_i^k}{\partial a} \right|_{a=0}.$$

Несложные вычисления позволяют найти выражение для координат ζ_i^k :

$$\zeta_i^k = \frac{\partial \eta^k}{\partial x^i} + \frac{\partial \eta^k}{\partial u^l} u_l^i - u_j^k \left(\frac{\partial \xi^i}{\partial x^i} + u_l^i \frac{\partial \xi^j}{\partial u^l} \right), \quad (13)$$

которое, заметим, линейно и однородно относительно первых производных от координат исходного (непродолженного) оператора X . Введем еще оператор полного дифференцирования по переменной x^i :

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x^i} + u_i^k \frac{\partial}{\partial u^k}. \quad (14)$$

С помощью этого оператора формулы (2) приобретут компактный вид:

$$\zeta_i^k = D_i(\eta^k) - u_j^k D_i(\xi^j), \quad (15)$$

$$i = 1, \dots, n; \quad j = 1, \dots, m.$$

Таким образом, исходя из группы G_1 можно получить группу преобразований \tilde{G}_1 в пространстве $E^{\tilde{N}}$ точек (x, u, u) . Знаком «1» обозначается совокупность первых про-

изводных $u = \left\{ \frac{\partial u^k}{\partial x^i} \right\}_1$. Введенный оператор D_i и формулы для координат ζ_i^k позволяют «забыть», какие переменные зависимые, какие — независимые, а какие являются производными от зависимых переменных по независимым. В самом деле, в пространстве точек (x, u, u) мы рассматриваем группу \tilde{G}_1 точечных преобразований, заданную опе-

ратором:

$$X = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \eta^k \frac{\partial}{\partial u^k} + \zeta_i^k \frac{\partial}{\partial u_i^k},$$

Где координата ζ_i^k отличается от ξ^i и η^k лишь тем, что она вычисляется по стандартным формулам продолжения (15) через ξ^i и η^k . В этом моменте один из основных «фокусов» Группового анализа, поскольку группа G_1 продолженных преобразований в продолженном пространстве $E^{\tilde{N}}$ позволяет рассматривать дифференциальные уравнения как алгебраические, исследовать их симметрию так же, как симметрию алгебраических уравнений, совершенно не интересуясь их «дифференциальной сутью» (наличием решений, их единственностью, гладкостью и т. д.).

Если координата $\zeta_i^k = \zeta_i^k(x, u, u)$ нам известна, то формулы конечных преобразований для производных $u_i^{k*} = \psi_i^k(x, u, u, a)$ можно восстановить, решая уравнение Ли $\frac{\partial \psi_i^k}{\partial a} = \zeta_i^k(f, g, \psi)$ с начальными условиями $\psi_i^k|_{a=0} = u_i^k$. Процесс продолжения преобразований группы G_1 точно также можно распространить на производные любого порядка.

Отметим, что инварианты I^1, \dots, I^{N-1} группы G_1 будут, конечно, и инвариантами продолженной группы G_1 . Однако группа G_1 должна иметь $\tilde{N} - 1 = N - 1 + m$ инвариант, т. е. на m больше исходной группы. Эти инварианты определяются уравнением $X F(x, u, u) = 0$. Инварианты продолженной группы G_1 , не являющиеся инвариантами исходной группы G_1 , называются *дифференциальными инвариантами*. Аналогично можно определить *дифференциальные инвариантные многообразия*.

Займемся теперь вопросом об инвариантности дифференциальных уравнений. Рассмотрим для простоты некоторую систему дифференциальных уравнений первого порядка:

$$F_\alpha(x, u, u) = 0, \quad \alpha = 1, \dots, m. \quad (S)$$

Говорят, что система уравнений (S) допускает группу преобразований G_1 (является инвариантной относительно группы G_1), если уравнения (S) не меняются под действием любого преобразования T_a , полученного продолжением

ем преобразования T_a на производные u_i^k . Можно сказать и по другому: система (S) допускает группу G_1 , если многообразие, заданное уравнениями (S) , является дифференциальным инвариантным многообразием группы G_1 .

Критерий инвариантности многообразия нам уже известен. Обозначим через S многообразие в $E^{\bar{N}}$, заданное уравнениями (S) . Пусть \bar{X} — продолжение оператора X группы G_1 . Тогда необходимым и достаточным условием инвариантности системы (S) будут равенства:

$$\bar{X}F_\alpha(x, u, u)|_S = 0, \quad \alpha = 1, \dots, m. \quad (16)$$

Уравнения (16) являются дифференциальными уравнениями относительно неизвестных заранее координат ξ^i и η^k оператора X и называются *определяющими уравнениями* для оператора X . Решив эти уравнения, мы найдем оператор X и, следовательно, группу G_1 , допускаемую системой уравнений (S) . Аналогично определяется инвариантность системы уравнений, содержащей n -й порядок производных. При этом, разумеется, надо рассматривать n -е продолжение оператора X . Еще раз подчеркнем удобство введенной S . Ли инфинитезимальной техники. Если не пользоваться инфинитезимальным критерием (16) инвариантности системы дифференциальных уравнений $F_\alpha(x, u, u) = 0$, а подставлять в нее формулы конечных преобразований $x^{i*} = f^i(x, u, a)$, $u^{k*} = g^k(x, u, a)$ и разрешать полученную систему относительно функций f^i и g^k , то задача нахождения допустимой группы станет необозримо громоздкой. Если уравнения (S) нелинейны, то и уравнения для определения функций f^i и g^k также будут нелинейны (для которых нет общих методов решения). Определяющие же уравнения (16) всегда линейны. Таким образом, инфинитезимальный критерий инвариантности (16) линейризует задачу отыскания группы преобразований, допускаемой заданной системой дифференциальных уравнений.

Решение $\xi^i(x, u)$, $\eta^k(x, u)$ определяющих уравнений для большинства встречающихся на практике систем не представляет особой трудности. Решение системы (16) может содержать произвольные постоянные или произвольные функции. Это означает, что данная система допускает не один оператор X . Заметим, что в силу отмеченного раньше свойства координат ζ_i^k уравнения (16) представ-

ляют собой линейные однородные уравнения относительно искомым координат ξ^i, η^k оператора X (при этом исходная система (S) может быть нелинейной). Отсюда следует, что если система (S) допускает операторы X_1 и X_2 , то она допускает и оператор $X = aX_1 + bX_2$, где a и b — произвольные постоянные. Иначе говоря, множество операторов $\{X\}$, допускаемых заданной системой (S) , образует линейное векторное пространство. Обозначим его через L_r , где r — размерность пространства операторов, допускаемых данной системой (S) . Величина r может иметь для разных систем разные значения: от 0 до ∞ .

Число r и вид допускаемых операторов определяют свойства симметрии данной системы. Они, вообще говоря, никак не связаны с существованием и числом решений у исходной системы (S) и являются некоторым глубинным качеством рассматриваемой системы уравнений. Число r для систем уравнений, изучаемых математической физикой, всегда больше нуля и характеризует симметрию исходной физической модели (однородность и изотропность пространства и времени и т. д.). К этому вопросу мы потом вернемся. Отметим еще раз важный факт группового анализа: если система обладает нетривиальной симметрией (в том смысле, что $r > 0$), то ей однозначно сопоставляется линейный объект — пространство L_r , допустимых операторов $\{X\}$, сама же система (S) может быть линейной или нелинейной. Это соответствие $(S) \rightarrow \{X\}$ не является взаимно-однозначным: один и тот же оператор X может допускаться разными системами. Заметим, что обратная задача — нахождение системы уравнений, которая бы допускала заданный оператор X , — тривиальна и не представляет интереса. В самом деле, имея оператор X , мы можем продолжать его произвольное число раз, находить инварианты и дифференциальные инварианты, из которых потом «изготавливать» системы дифференциальных уравнений с гарантированным качеством инвариантности.

Вернемся, однако, к системе определяющих уравнений (13). Мы уже знаем, что множество ее решений $\{\xi(x, u), \eta(x, u)\}$ порождает линейное векторное пространство операторов $\{X\}$, которые поэтому можно умножать на числа, складывать и т. д. Оказывается, это множество $\{X\}$ обладает еще одним существенным свойством. Для любых двух операторов $X_1 = \xi_1^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, $X_2 = \xi_2^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ образуем комбинацию

по формуле

$$[X_1, X_2] \equiv (X_1 \xi_2^i - X_2 \xi_1^i) \frac{\partial}{\partial x^i} = X_1 X_2 - X_2 X_1.$$

Такая комбинация называется *коммутатором* операторов X_1 и X_2 . Коммутатор $[X_1, X_2]$ обладает легко проверяемыми свойствами.

1. Он линеен (по каждой из «компонент»):

$$[(aX_1 + bX_2), X_3] = a[X_1, X_3] + b[X_2, X_3].$$

2. Коммутатор антисимметричен:

$$[X_1, X_2] = -[X_2, X_1].$$

3. Для него выполняется тождество Якоби:

$$[[X_1, X_2], X_3] + [[X_2, X_3], X_1] + [[X_3, X_1], X_2] = 0.$$

Свойство множества $\{X\}$, о котором мы говорили, заключается в том, что коммутатор $[X_1, X_2]$ любых двух операторов X_1 и X_2 , допускаемых некоторой системой уравнений (S) , представляется в виде линейной комбинации из допустимых операторов $\{X\}$ и, значит, также допускается этой системой. Иначе говоря, операция коммутации не выводит из множества операторов $\{X\}$, допускаемых системой (S) .

Такие множества называются алгеброй Ли. Из самого определения коммутатора видно, что перестановочность X_1 и X_2 (или их коммутирование) связана с величиной $[X_1, X_2]$ — равна она нулю или нет. И действительно, перестановочность преобразований, соответствующих операторам X_1 и X_2 , легко проверяется с помощью вычисления коммутатора. Введение коммутатора оказывается полезным и для выяснения многих других важных и тонких структурных свойств группы допустимых преобразований. Алгебры Ли изучаются не только при исследовании симметрии дифференциальных уравнений. Например, в трехмерном пространстве векторов можно ввести коммутатор — векторное произведение

$$[a_1, a_2] = (a_1 \times a_2),$$

для которого легко проверить выполнение перечисленных свойств, например тождество Якоби — это известная школьная формула «БАЦ минус ЦАБ». Для нас здесь важен такой факт: множество операторов, допускаемых некоторой системой дифференциальных уравнений, образует алгебру Ли. Иначе говоря, если система (S) допуска-

ет операторы X_1 и X_2 , то она допускает и их коммутатор $[X_1, X_2]$.

Итак, мы познакомились с понятиями однопараметрической группы G_1 и алгеброй Ли. В теории Ли понятие однопараметрической группы обобщается на многопараметрический случай, в котором r -параметрическая группа G_r определяется преобразованиями, зависящими от r параметров; при этом оказывается, что группа G_r как бы «соткана» из однопараметрических подгрупп. Например, любое r -параметрическое преобразование T_{a_1, a_2, \dots, a_r} может быть представлено в виде суперпозиции преобразований, образующих однопараметрические подгруппы:

$$T_{a_1, a_2, \dots, a_r} = T_{a_1} T_{a_2} \dots T_{a_r}.$$

Для группы G_r аналогично обобщается понятие алгебры Ли инфинитезимальных операторов, которая характеризуется набором из r операторов X_α . В теории Ли характерно параллельное рассмотрение групп и алгебр Ли. Взаимно-однозначное соответствие $G_r \leftrightarrow L_r$ распространяется на подгруппы и подалгебры и другие структурные свойства этих объектов. Поэтому зная все однопараметрические группы, допускаемые изучаемой системой, мы фактически полностью знаем группу G_r , характеризующую симметрию данной системы уравнений.

Задача группового анализа.

Примеры вычисления

однопараметрической группы преобразований

Итак, мы теперь знаем, что такое групповое свойство системы дифференциальных уравнений, свойство ее инвариантности. Основная задача группового анализа заключается в нахождении всех групп G_1 , допускаемых заданной системой дифференциальных уравнений.

Перейдем к примерам вычисления группы G_r . Найдем пространство L_r операторов, допускаемых обыкновенным дифференциальным уравнением

$$du/dx = F(x, u). \quad (17)$$

Здесь $m = n = 1$, $N = 2$, $N_1 = 3$. Искомый оператор X представим в виде

$$X = \xi(x, u) \frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, u) \frac{\partial}{\partial u}.$$

Продолжим его на производную $u' = du/dx$:

$$X = \xi \frac{\partial}{\partial x} + \eta \frac{\partial}{\partial u} + [\eta_x + u'^2(\eta_u - \xi_x) - u'^2 \xi_u] \frac{\partial}{\partial u'}.$$

Поддействуем оператором X на уравнение $u' = F(x, u)$ и «выйдем» на многообразие (17) — заменим величину u' через правую часть $F(x, u)$. В результате получим определяющее уравнение

$$\eta_x + (\eta_u - \xi_x)F - \xi_u F^2 = \xi F_x + \eta F_u.$$

Ясно, что решение этого уравнения будет содержать произвольную функцию, поскольку одно уравнение служит для определения двух функций $\xi(x, u)$, $\eta(x, u)$, т. е. пространство допустимых операторов будет бесконечно. Действительно, сделав замену $\eta = \xi F + v$, получим уравнение для $v(x, u)$:

$$\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial u} F = v F_v, \quad (18)$$

которое имеет частное решение $v = 0$. Это решение дает оператор $X^\infty = \xi \frac{\partial}{\partial x} + \xi F \frac{\partial}{\partial u}$ (т. е. $L = L_\infty$) с произвольной функцией $\xi(x, u)$. Подобная ситуация характерна для уравнений и систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка — допускаемая группа всегда бесконечна.

Если удастся найти хотя бы одно ненулевое решение $v(x, u)$ уравнения (18), то это сразу же позволяет проинтегрировать исходное уравнение (17). Запишем его в виде $du = F dx$. Пусть $M(x, u)$ — интегрирующий множитель, т. е. функция, умножение на которую превращает левую часть уравнения в полный дифференциал некоторой функции $W(x, u)$:

$$M du - MF dx = 0 \rightarrow dW(x, u) = 0.$$

Условие существования интегрирующего множителя — равенство смешанных производных

$$\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial(-MF)}{\partial u}.$$

Заменой переменной $M = 1/v$ это условие сводится к уравнению (18). Верно и обратное рассуждение: если $v(x, u)$ — ненулевое решение определяющего уравнения (18), то $M = 1/v$ — интегрирующий множитель исходного уравнения. Если нам каким-либо образом удастся угадать решение уравнения (18), т. е. какую-то симметрию

уравнения (17), то мы сразу же находим интегрирующий множитель.

Например, уравнение $y' = \frac{y}{x(y + \ln x)}$ обладает указанной симметрией, определяемой оператором $X = xy \frac{\partial}{\partial x}$, откуда сразу легко получить интегрирующий множитель $M^{-1} = \eta - f\xi = \frac{y^2}{y + \ln x}$, превращающий исходное уравнение в уравнение в полных дифференциалах $\frac{y + \ln x}{y^2} dy - \frac{1}{xy} dx = 0$, которое мгновенно интегрируется — получается решение в виде полного интеграла

$$\ln y - \frac{\ln x}{y} = \text{const.}$$

Этот пример показывает, что если из каких-то косвенных соображений известна симметрия уравнения, то его решение не представляет труда.

Однако групповой анализ обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка не дает регулярных алгоритмов нахождения решения — общее решение определяющего уравнения (18) найти не легче, чем решить исходное уравнение (17).

Иное дело — обыкновенные дифференциальные уравнения порядка выше первого. Для них групповой анализ становится эффективным инструментом исследования. Рассмотрим простейшее уравнение второго порядка:

$$d^2u/dx^2 = 0$$

(это уравнение рассматривал еще сам С. Ли).

Даже не проводя группового анализа, можно угадать некоторую симметрию этого уравнения. Ясно, что оно допускает сдвиги по переменным x и u , поскольку эти переменные входят в уравнение лишь в виде дифференциалов. Таким преобразованиям соответствуют, как мы знаем, операторы $X_1 = \partial/\partial x$, и $X_2 = \partial/\partial u$. Столь же очевидны и преобразования растяжения:

$$X_3 = x \partial/\partial x, \quad X_4 = u \partial/\partial u.$$

Если рассматривать это уравнение как уравнение движения частицы в отсутствии внешних сил (u — координата, x — время), то ясно, что оно допускает «галилеев перенос»

$$x^* = x, \quad u^* = u + ax,$$

т. е. переход в другие системы координат, движущиеся равномерно и поступательно с любой скоростью a по отношению к исходной системе. Заметим, что x и u входят в уравнение симметрично, поэтому допустимы и преобразования: $x^* = x + au$, $u^* = u$. Этим преобразованиям соответствуют операторы $X_5 = u\partial/\partial x$, $X_6 = x\partial/\partial u$. Групповой анализ уравнения $u'' = 0$ дает еще два допустимых оператора — их уже угадать трудно:

$$X_7 = xiu\partial/\partial x + u^2\partial/\partial u,$$

$$X_8 = x^2\partial/\partial x + ux\partial/\partial u.$$

Анализ определяющего уравнения для $u'' = 0$ содержит в себе еще и доказательство того, что перечисленные операторы, задающие алгебру Ли L_8 , исчерпывают всю симметрию этого уравнения. Более того, уравнение $u'' = 0$ (и эквивалентные ему) в определенном смысле уникально — на нем достигается максимальная размерность пространства L_r операторов, допускаемых уравнением второго порядка. С. Ли была доказана теорема о том, что уравнение $u'' = F(x, u, u')$ не может допускать пространства операторов с $r > 8$

Математические модели, изучаемые математической физикой, в подавляющем большинстве случаев представляют собой уравнения (или системы) в частных производных. Замечательно, что именно здесь алгоритмы группового анализа работают «в полную силу» и приводят к нетривиальным результатам.

Рассмотрим типичное уравнение математической физики — уравнение теплопроводности

$$u_t = u_{xx}.$$

Допускаемая им группа преобразований была найдена С. Ли (1881 г.). Группа, допускаемая линейным уравнением теплопроводности, бесконечна. В набор операторов, допускаемых этим уравнением, входит $X_\infty = b(x, t)\partial/\partial u$, где $b(x, t)$ — любое решение исходного уравнения $b_t = b_{xx}$. Поскольку таких линейно независимых решений существует бесконечно много, то оператор X_∞ порождает пространство L_∞ . Однако с позиций симметрии он несет очевидную информацию. Действительно, конечные преобразования, соответствующие оператору X_∞ :

$$u^* = u + a \cdot b(x, t), \quad x^* = x, \quad t^* = t$$

говорят лишь о том, что к решению исходного уравнения

можно прибавить любое другое решение того же уравнения, — факт, равносильный линейности исходного уравнения. Такая ситуация имеет место для любого линейного уравнения. Когда же нелинейное уравнение допускает бесконечную группу (довольно редкое явление), то это уже нетривиальный факт. В этом случае нелинейное уравнение обладает многими свойствами линейного и, как показывает практика, либо сводится заменой переменных к линейному уравнению, либо решается методом обратной задачи рассеяния.

Помимо оператора X_∞ , уравнение теплопроводности допускает еще шесть операторов:

$$X_1 = \partial/\partial x, \quad X_2 = \partial/\partial t,$$

$$X_3 = x\partial/\partial x + 2t\partial/\partial t,$$

$$X_4 = 2t\partial/\partial x - xu\partial/\partial u,$$

$$X_5 = xt\partial/\partial x + t^2\partial/\partial t - \frac{1}{4}(x^2 + 2t)u\partial/\partial u,$$

$$X_6 = u\partial/\partial u.$$

Эти операторы несут существенную информацию об уравнении теплопроводности. В чем она заключается и как ее можно использовать, мы увидим чуть позже.

Групповая классификация уравнений математической физики

Современные модели математической физики в большинстве случаев нелинейны. Это относится и к реальным задачам теплопроводности. Изучаемые среды, как правило, обладают нелинейными коэффициентами теплопроводности. В этом случае симметрия линейного уравнения помочь не может — нужно проделать групповой анализ уравнения пелинейной теплопроводности

$$u_t = (k(u)u_x)_x$$

с тем коэффициентом $k = k(u)$, который соответствует рассматриваемой ситуации. Заметим, что групповой анализ нелинейного уравнения теплопроводности с конкретным коэффициентом $k(u)$ лишь немного сложнее линейного случая. Немногие современные методы могут похвастаться такой «всеядностью». Перебрать все случаи $k(u)$, встречающиеся на практике, вряд ли возможно. Оказывается, это и не нужно, поскольку для указанного урав-

нения можно решить задачу группового анализа в общем случае — для произвольной функции $k(u)$. Такое обобщение задачи вычисления группы допустимых преобразований называется *групповой классификацией*. Первые примеры решения задачи групповой классификации принадлежат С. Ли. Возрождение такого подхода применительно к задачам механики сплошной среды было дано в работах Л. В. Овсянникова. Поясним постановку задачи на примере групповой классификации уравнения нелинейной теплопроводности (Л. В. Овсянников, 1959 г.). Обозначим через $S(k)$ уравнение нелинейной теплопроводности с некоторым произвольным коэффициентом $k(u)$. Снабдим индексом «0» уравнение с конкретным коэффициентом $k_0 = k_0(u)$: $S_0 = S(k_0)$ (k_0 и S_0 называются специализациями коэффициента теплопроводности и соответственно уравнения). Ясно, что если уравнение теплопроводности S допускает некоторую группу G независимо от коэффициента k , то ее допускает и каждая специализация S_0 , отвечающая конкретному коэффициенту k_0 . Однако возможны случаи, когда группа G_0 некоторой специализации S_0 , отвечающей коэффициенту $k_0(u)$, шире G . Все такие случаи и подлежат нахождению в задаче групповой классификации. Чисто технически это означает, что определяющая система выписывается с неконкретизированным коэффициентом $k(u)$ и упрощается без конкретизации $k(u)$ до тех пор, пока это возможно. В результате возникают классифицирующие уравнения, решение которых и дает вид функций $k_0(u)$, расширяющие допустимую группу. Уравнение нелинейной теплопроводности в общем случае допускает пространство операторов переноса и растяжения, которое расширяется при следующих специализациях коэффициента $k(u)$: e^u , u^σ ($\sigma = \text{const}$), $u^{-1/2}$, 1. Для первой и второй специализации расширение пространства допустимых операторов происходит до L_4 (при этом операторы для случаев e^u и u^σ разные), для третьей — до L_5 . Четвертый случай, $k \equiv 1$, — случай линейной теплопроводности, к нему мы и вернемся ниже. Что касается второй специализации — степенного коэффициента теплопроводности, то одно из инвариантных решений будет использовано в разд. 3.

Что дает знание симметрии, т. е. группы допустимых преобразований данного уравнения?

Во-первых, позволяет генерировать новые решения, во-вторых, находить так называемые инвариантные решения, о которых мы только что упомянули, в третьих... Впрочем, давайте все по порядку.

Группа — генератор решений

Интуитивно ясно (хотя это доказывается в виде теоремы), что если есть некоторое решение $u = \varphi(x, t)$ уравнения теплопроводности и если T_a — преобразование, оставляющее это уравнение неизменным, то под действием T_a решение переходит снова в решение того же уравнения. Этот факт сразу же дает возможность получать новые решения из уже известных.

Пусть некоторая система уравнений (S) допускает группу G_1 преобразований $\{T_a\}$. Пусть $u^k = \varphi^k(x)$, $k = 1, \dots, n$, — какое-либо решение системы (S) . Под действием T_a : $x^{i*} = f^i(x, u, a)$, $u^{k*} = g^k(x, u, a)$ это решение перейдет в решение той же системы (S) : $u^{k*} = \varphi^{k*}(x^*)$ или в переменных (x, u) :

$$g^k(x, u, a) = \varphi^{k*}(f(x, u, a)), \quad k = 1, \dots, m. \quad (19)$$

Уравнение (19) и определяет (неявно) новое решение $u^k = \Psi^k(x, a)$, полученное из известного $u^k = \varphi^k(x)$. Эту операцию можно проделать с помощью любого преобразования T_a , задаваемого набором допустимых операторов $\{X\}$. В результате из одного известного решения можно получить целый «веер» преобразованных.

Вернемся к уравнению теплопроводности и применим полученную формулу (19) с использованием оператора X_b . Конечные преобразования T_a , определяемые X_b , таковы:

$$x^* = \frac{x}{1-at}, \quad t^* = \frac{t}{1-at},$$

$$u^* = \sqrt{1-at} e^{-ax^2/[4(1-at)]} u.$$

Любое решение вида $u = \varphi(x, t)$ под действием этих преобразований перейдет в

$$\sqrt{1-at} \exp\left(-\frac{ax^2}{4(1-at)}\right) u = \varphi\left(\frac{x}{1-at}, \frac{t}{1-at}\right),$$

откуда u находится явно:

$$u = \frac{1}{\sqrt{1-at}} \exp\left(\frac{ax^2}{4(1-at)}\right) \varphi\left(\frac{x}{1-at}, \frac{t}{1-at}\right).$$

Заметим, что такая трансформация решения отнюдь не очевидна. С помощью последней формулы можно сделать еще один «фокус». Ясно, что $u = \varphi \equiv 1$ — решение уравнения теплопроводности. Умножим трансформированное решение на $\sqrt{-a}$ ($a \leq 0$) и перейдем к пределу при $a \rightarrow -\infty$. В результате получим фундаментальное реше-

ние уравнения теплопроводности (из «простой» единицы!)

$$u = e^{-x^2/4t} / \sqrt{t}.$$

(Зная это решение можно получить аналитическое выражение для профиля температуры при любых начальных данных, в частности и для таких, которые рассматривались в первой статье.)

Такое «размножение» решений можно осуществлять с помощью любого из операторов X_1, \dots, X_6 и любой их линейной комбинации. Так, с помощью одного решения можно «вырастить» совокупность решений, которая называется орбитой решения.

В рассмотренном примере решение уравнения теплопроводности переходит в другое решение того же уравнения. Однако возможна ситуация, когда данное решение под действием некоторого допустимого уравнением (или системой уравнений) преобразования переходит само в себя. Такие решения называются инвариантными, или решениями, инвариантными относительно данных преобразований или группы (подгруппы) преобразований. Геометрический смысл их ясен — это неподвижные решения при данном преобразовании. Замечательно, что такие решения находятся из более простой задачи, чем исходное уравнение. Точнее, инвариантное решение определяется уравнением (системой) меньшей размерности, чем исходное уравнение (система). В самом простом, самом «симметричном» случае — случае инвариантного решения 1-го ранга (ранг решения — число независимых переменных в системе уравнений, определяющих инвариантное решение) требуется проинтегрировать обыкновенное дифференциальное уравнение (систему уравнений). Почему задача нахождения инвариантного решения проще, чем решение исходного уравнения? Потому что при его поиске мы используем априорную информацию о симметрии изучаемой системы. Это выражается в том, что решение ищется в определенном виде, гарантирующем инвариантность решения при соответствующих преобразованиях.

Этот процесс можно сравнить с поиском нужной выкройки в приложении к журналу мод. Обращали внимание на хаотическое нагромождение линий в таких приложениях? Чтобы найти нужную выкройку, любительница кройки и шитья должна следовать линии определенного цвета или снабженной специальными метками. В нашем случае цветом является симметрия инвариантного решения.

Рассмотрим пример группы преобразований, допускаемой уравнением нелинейной теплопроводности с источником в двумерном случае:

$$u_t = (u^{\sigma_1} u_x)_x + (u^{\sigma_2} u_y)_y + u^\beta. \quad (20)$$

В случае, когда $\sigma_1 \neq \sigma_2$ (такая среда называется анизотропной — теплопроводность различна по разным направлениям. В природе анизотропной теплопроводностью обладают многие кристаллические тела, плазма в магнитном поле и другие объекты), допускаемая этим уравнением группа определяется следующими операторами:

$$X_1 = \partial/\partial t, \quad X_2 = \partial/\partial x, \quad X_3 = \partial/\partial y,$$

$$X_4 = 2(1 - \beta) t \partial/\partial t + (\sigma_1 - \beta + 1) x \partial/\partial x + (\sigma_2 - \beta + 1) y \partial/\partial y + 2u \partial/\partial u.$$

В изотропном случае $\sigma_1 = \sigma_2$ к ним добавляется оператор $X_5 = x_2 \partial/\partial x_1 - x_1 \partial/\partial x_2$, порождающий подгруппу вращения.

Рассмотрим оператор $X_1 = \partial/\partial t$ и построим инвариантное относительно него решение. Из переменных (t, x, y, u) выделить $N - 1 = 3$ инварианта: x, y, u . В силу теоремы о представлении инвариантного многообразия мы можем в нашем случае представить решение в виде $u = \tilde{u}(x, y)$, т. е. представить третий инвариант в виде функции от первых двух. В качестве независимых переменных можно было выбрать любые два. Наш выбор предпочтительней из физических соображений. Функция $\tilde{u}(x, y)$, дающая стационарное решение уравнения (20), определяется из уравнения

$$(u^{\sigma_1} u_x)_x + (u^{\sigma_2} u_y)_y + u^\beta = 0,$$

полученного подстановкой $u = \tilde{u}(x, y)$ в (20). Решение этого уравнения дает стационарное распределение тепла в некоторой области. Аналогично можно строить инвариантные решения на операторах X_2, X_3, X_4 и их линейных комбинациях.

Рассмотрим более подробно решение, инвариантное относительно линейной комбинации X_1 и X_4 :

$$\begin{aligned} X_4^* &= 2(1 - \beta) t_0 X_1 + X_4 = 2(1 - \beta) (t_0 - t) \frac{\partial}{\partial (t_0 - t)} + \\ &+ (\sigma_1 - \beta + 1) x \frac{\partial}{\partial x} + (\sigma_2 - \beta + 1) y \frac{\partial}{\partial y} + \\ &+ 2u \frac{\partial}{\partial u}, \quad t_0 > 0. \end{aligned}$$

Решая уравнение $X_4^* J = 0$, найдем три инварианта этой группы:

$$\begin{aligned}\bar{u} &= u(t_0 - t)^{-\frac{1}{1-\beta}}, \quad \xi = x(t_0 - t)^{\frac{\sigma_1 - \beta + 1}{2(\beta - 1)}}, \\ \eta &= y(t_0 - t)^{\frac{\sigma_2 - \beta + 1}{2(\beta - 1)}}.\end{aligned}$$

Назначив первый инвариант функцией от двух других, получим, что инвариантное относительно X_4^* решение надо искать в виде

$$u(t, x, y) = \bar{u}(\xi, \eta)(t_0 - t)^{\frac{1}{1-\beta}}. \quad (21)$$

Такого вида инвариантные решения обычно называют автомодельными (в данном случае — двумерные). Заметим, что автомодельные решения, соответствующие операторам растяжения, — это единственный вид инвариантных решений, которые находятся методом теории размерностей.

Введенный параметр $t_0 > 0$ определяет интервал времени $[0, t_0)$ на котором существует решение, т. е. решение (21) определяет распространение тепла в режиме с обострением.

Подстановка (21) в уравнение (20) приводит к эллиптическому уравнению для функции $\bar{u}(\xi, \eta)$:

$$\begin{aligned}(\bar{u}^{\sigma_1} \bar{u}_{\xi})_{\xi} + (\bar{u}^{\sigma_2} \bar{u}_{\eta})_{\eta} + \frac{\sigma_1 - \beta + 1}{2(\beta - 1)} \xi \bar{u}_{\xi} + \\ + \frac{\sigma_2 - \beta + 1}{2(\beta - 1)} \eta \bar{u}_{\eta} + \bar{u}^{\beta} - \frac{1}{\beta - 1} \bar{u} = 0.\end{aligned} \quad (22)$$

Попытки построить решение, даже численное, нелинейного уравнения (22) наталкиваются на большие трудности. Поэтому был проведен численный эксперимент по изучению развития начального возмущения температуры в небольшой области пространства. При этом численно рассчитывалось исходное уравнение (20) (методом конечных элементов и конечно-разностным методом). В качестве начального возмущения бралась единичная температура в квадратной области, вне которой температура равна нулю. В расчетах принималось $\beta > 1$. Даже не проводя численных расчетов, можно предсказать поведение инвариантного решения из (21) и вида инвариантов ξ и η . Действительно, при $\sigma_1 = \sigma_2 = \beta - 1$, переменные в (2)

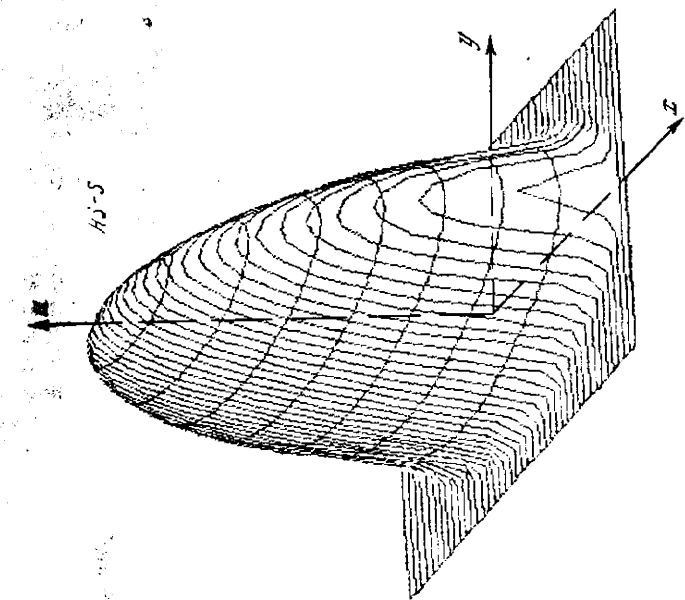


Рис. 5

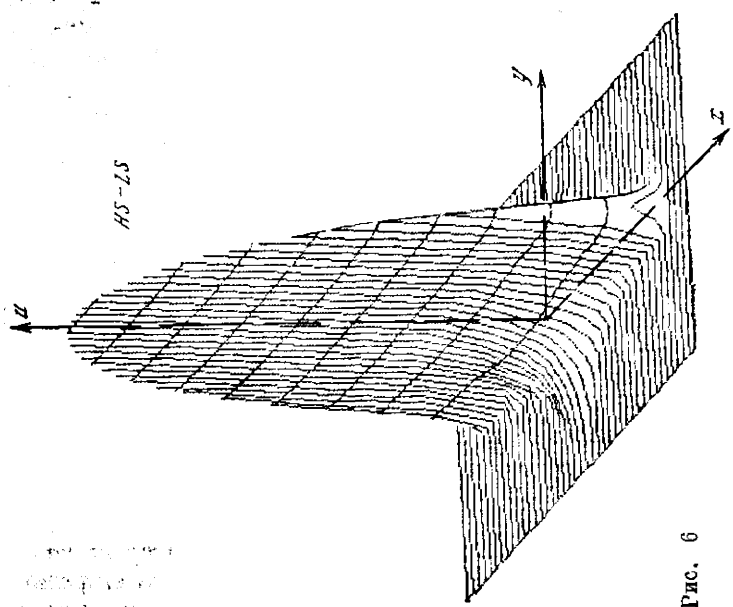


Рис. 6

«разделяются», с течением времени стационарное решение $\bar{u}(x, y)$ умножается на растущий в режиме обострения множитель $(t_0 - t)^{\frac{1}{1-\beta}}$. При $t \rightarrow t_0$ амплитуда решения $u(x, y, t)$ стремится к бесконечности, при этом распространения тепла по пространству не происходит, — это так называемый S -режим.

В случае $\sigma_1 > \sigma_2$, $\sigma_2 + 1 = \beta$ по направлению y распространения тепла не происходит (S -режим), в направлении x за конечное время происходит распространение тепла до бесконечности (HS -режим). Таким образом, тепло распространяется в канале, вне которого температура равна нулю.

На рис. 5 изображена численная реализация такого решения при $\sigma_1 = 3$, $\sigma_2 = 2$, $\beta = 3$.

При $\sigma_1 > \beta - 1$, $\sigma_2 < \beta - 1$ реализуется самый парадоксальный режим прогресса нелинейной среды. В этом случае по направлению x тепловой фронт за время t_0 достигает бесконечности (HS -режим), а в направлении y происходит сокращение эффективной глубины прогресса (LS -режим). Таким образом, на финальной стадии процесса решение представляет собой «бесконечно прогретую линию», вне которой температура конечна.

На рис. 6 дана численная реализация такого режима при следующих параметрах среды: $\sigma_1 = 3$, $\sigma_2 = 1$, $\beta = 3$.

Заметим, что два последних режима реализуются при любых σ_1 , σ_2 и β , дающих указанные соотношения. При этом анизотропия среды $\sigma_1 > \sigma_2$ может быть сколь угодно мало выражена. Это приведет лишь к изменению скорости роста амплитуды и распространения фронта тепловой волны, качественные стороны процесса останутся теми же.

Рассмотренных примеров достаточно, чтобы понять, что количество инвариантных решений можно увеличивать до бесконечности, набирая линейные комбинации из операторов X_1, X_2, \dots . Однако этого делать не надо, поскольку между инвариантными решениями существуют вполне определенные связи. Это позволяет для каждой системы уравнений, допустимая группа которой известна, построить в некотором смысле фундаментальный набор инвариантных решений. Все остальные решения могут быть получены из него. Суть такого подхода, предложенного Л. В. Овсянниковым, заключается в следующем.

Пусть G — группы, допускаемая системой (S) , а H_1

и H_2 — ее подгруппы, на которых мы строим инвариантные решения (данного ранга). Если существует преобразование $T \in G$, связывающее H_1 и H_2 таким образом, что $H_1 = TH_2T^{-1}$, то подгруппы H_1 и H_2 называются подобными. Оказывается, соответствующие инвариантные решения Φ_1 и Φ_2 связаны тем же преобразованием T : $\Phi_1 = T\Phi_2$, т. е. знание одного решения автоматически влечет за собой знание другого. Подобные решения называются несущественно различными. Таким образом, задача сводится к нахождению всех попарно неподобных подгрупп H_i данной группы G и выписыванию соответствующего набора инвариантных решений. Для этого разработана соответствующая методика. Введение этого подхода позволяет «навести порядок» в «хаосе» различных частных решений для каждой системы уравнений.

Многие инвариантные решения уже давно и с успехом используются в математической физике — это стационарные, однородные, решения типа бегущей волны, автомодельные решения. Гидродинамики широко используют при решении многомерных задач одномерные, двумерные, осесимметричные решения, также являющиеся инвариантными и получающиеся с помощью многопараметрических групп, которые допускаются уравнениями газодинамики в пространственных случаях.

Оказывается, запас частных решений, которые могут быть найдены с помощью группы преобразований, допускаемой данной системой, можно увеличить. Еще Риману были известны частные решения уравнений газовой динамики, так называемые простые волны, которые не укладываются в класс инвариантных решений. Однако оказалось, что простые волны и другие аналогичные решения также могут быть получены с помощью группы допустимых преобразований. Л. В. Овсянниковым было введено понятие частичной инвариантности и соответственно *частично инвариантных решений*. Частично инвариантные решения не являются инвариантными, неподвижными решениями при преобразованиях группы. Однако существует инвариантное многообразие, их содержащее. Такие решения характеризуются параметром δ , называемым дефектом инвариантности, который показывает, насколько «плотно сидит» частично инвариантное решение в инвариантном многообразии, его содержащем. Чем больше δ , тем сильнее «болтается» решение при преобразованиях группы; если $\delta = 0$, то решение неподвижно, т. е. является инвариантным. Такое обобщение понятия инвариант-

ного решения оказывается очень полезным, поскольку приводит к интегрированию системы уравнений меньшей размерности по сравнению с исходной¹.

Законы сохранения и инвариантность дифференциальных уравнений

Еще в прошлом веке было замечено, что между свойствами симметрии (групповыми свойствами) механической системы и существованием законов сохранения имеется определенная связь. Так, закон сохранения количества движения есть следствие однородности пространства, закон сохранения момента количества движения — изотропности пространства, наконец, закон сохранения энергии — однородности времени. Под однородностью мы понимаем инвариантность относительно преобразования переноса или сдвига, под изотропностью — инвариантность относительно преобразования поворота.

Связь законов сохранения с пространственно-временной симметрией означает, что сам по себе ход времени или перемещение в пространстве не может привести к изменению состояния изолированной системы. Для изменения ее физического состояния необходимо взаимодействие с внешней средой.

Заметим, что во всех математических моделях некоторые (или все) уравнения представляют собой математическую запись законов сохранения. Законы сохранения — это основа для построения модели любого явления. Как мы увидим чуть позже, симметрия модели взаимно-однозначно связана с законами сохранения, является таким же глубинным свойством модели и потому может быть положена в основу при математическом моделировании.

Изучением связи законов сохранения с симметрией модели занимались многие математики, однако в случае произвольных систем дифференциальных уравнений создать общий метод отыскания всех законов сохранения не удастся. Это можно сделать для систем, допускающих вариационную формулировку (например, в механике).

Пусть рассматривается система дифференциальных

¹ Ознакомиться с алгоритмом получения частично инвариантных решений, более сложным по сравнению с поиском инвариантных решений, можно, например, в монографии Л. В. Овсянникова [12].

уравнений

$$F_\alpha(x, u, u_1, u_2) = 0, \quad \alpha = 1, \dots, m, \quad (S)$$

где u — совокупность частных производных порядка k .

Для некоторых таких систем известна вспомогательная функция $L = L(x, u, u)$, называемая функцией Лагранжа, продифференцировав которую специальным образом, можно получить уравнения (S):

$$\delta L \equiv \mathcal{D}_i (\partial L / \partial u_i^k) - \partial L / \partial u^k = 0, \quad k = 1, \dots, m, \quad (E)$$

где \mathcal{D}_i — полное дифференцирование по переменной x_i . Уравнения (E) называются уравнениями Эйлера. На решениях этих уравнений достигается экстремальное значение интеграла

$$\mathcal{L}(u) = \int_{\Omega} L(x, u, u) dx. \quad (I)$$

Интеграл (I) называется вариационным, а решения уравнений (E) — экстремалиями. Здесь наблюдается полная аналогия с экстремумом «обычной» функции, который достигается в точке, где производные обращаются в нуль. Обобщение заключается в том, что ищется экстремум вариационного интеграла (I), который достигается не в точке, а на решениях уравнений (E), полученных приравниванием нулю *вариационной производной* $\delta L = 0$. Как правило, функция L имеет конкретный физический смысл, например энергия рассматриваемой системы. Функция Лагранжа L для изучаемой системы уравнений позволяет вычислить законы сохранения, дающие большую информацию о глубинных свойствах модели.

Для таких систем известна теорема Э. Нётер (1882—1935), дающая конструктивный способ отыскания законов сохранения. Именно, если вариационный интеграл инвариантен относительно группы G_r (а значит, инвариантны и соответствующие уравнения Эйлера, которые из него получаются) с базисным набором инфинитезимальных операторов:

$$X_\alpha = \xi_\alpha^i \partial / \partial x^i + \eta_\alpha^k \partial / \partial u^k, \quad \alpha = 1, \dots, r,$$

то для уравнений Эйлера выполняются независимые законы сохранения: $\mathcal{D}_i A_\alpha^i |_{(S)} = 0, \quad \alpha = 1, \dots, r$

где векторы $A_{\alpha}^i(x, u, u)$ задаются формулами:

$$A_{\alpha}^i = (\eta_{\alpha}^i - u_j^k \xi_{\alpha}^j) \partial L / \partial u_i^k + L \xi_{\alpha}^i, \quad i = 1, \dots, n; \\ \alpha = 1, \dots, r.$$

В качестве примера рассмотрим хорошо известные законы сохранения в классической механике. Уравнения Эйлера (уравнения движения) для свободно движущейся частицы с массой m имеют вид

$$m\ddot{x}^k = 0, \quad k = 1, 2, 3,$$

где x^k — координаты частицы, являющиеся функциями времени t , дифференцирование по которому обозначим точкой сверху. Функция Лагранжа частицы — это ее энергия

$$L = \frac{m}{2} \sum_{k=1}^3 (\dot{x}^k)^2.$$

Записав инфинитезимальные операторы, определяющие симметрию уравнений движения, в виде

$$X = \xi \partial / \partial t + \eta^k \partial / \partial x^k,$$

получим формулу для вычисления векторов A (в данном случае являющихся одномерными):

$$A = m \sum_{k=1}^3 \dot{x}^k \left(\eta^k - \frac{1}{2} \xi \dot{x}^k \right). \quad (A)$$

Уравнения движения частицы допускают группу переноса вдоль координат x^k , по времени t и вращения, которые соответственно задаются операторами

$$X_k = \partial / \partial x^k, \quad k = 1, 2, 3, \quad X_4 = \partial / \partial t,$$

$$X_{kl} = x^l \partial / \partial x^k - x^k \partial / \partial x^l, \quad k, l = 1, 2, 3.$$

Выпишем для этих операторов сохраняющиеся величины по формуле (A). Переносу вдоль координаты x^l соответствует величина $A = mv^l \equiv m\dot{x}^l$. Переносу вдоль всех трех координат x^k соответствует сохраняющаяся величина вектора импульса $p = mv$. Таким образом, инвариантность уравнений движения (и соответствующего функционала) относительно переносов координат дает закон сохранения импульса. Переносу по времени соответствует

$$E = \frac{m}{2} \sum_{k=1}^3 (\dot{x}^k)^2, \text{ т. е. закон сохранения энергии.}$$

Рассмотрев вращения вокруг осей x^1, x^2, x^3 , получим три сохраняющиеся величины, которые в векторном виде можно записать как $\mathbf{M} = \mathbf{p} \times \mathbf{x}$, т. е. группа вращений дает закон сохранения момента импульса.

Таким образом, число независимых законов сохранения совпадает с числом независимых операторов X_α , характеризующих симметрию задачи. Теорема Э. Нётер устанавливает *достаточное* условие существования законов сохранения. Однако это условие не является *необходимым*, поэтому могут существовать законы сохранения (и такие примеры есть), не получающиеся с помощью метода Э. Нётер. В этом смысле «обратная теорема» Нётер неверна.

Советским математиком Н. Х. Ибрагимовым эта теорема была уточнена с применением современной техники группового анализа. При «передоказательстве» этой теоремы выяснилось, что Э. Нётер требует в своей теореме слишком многого — инвариантности вариационного интеграла *во всем пространстве*. Н. Х. Ибрагимовым были найдены *необходимые и достаточные* условия существования законов сохранения. Именно для того чтобы указанные векторы A_α^i давали законы сохранения для системы (S), необходима и достаточна *инвариантность* значений вариационного интеграла *на экстремалях*, т. е. на решениях уравнений Л. Эйлера. Эта теорема позволила найти дополнительные законы сохранения, не получающиеся из теоремы Э. Нётер, для многих уравнений, допускающих вариационную формулировку, в частности для уравнений Дирака.

Для уравнений, не получающихся из вариационного принципа, таких общих правил пока не установлено. Однако в настоящее время разработана техника, позволяющая конструктивно использовать групповые свойства указанных систем для построения законов сохранения. В частности, найдены два дополнительных закона сохранения для уравнений динамики политропного газа (газ, давление и плотность в котором связаны соотношением $p = p(\rho)$) в ряде исключительных случаев.

Знание группы преобразований, которую допускает данная система уравнений, позволяет «навести порядок» среди законов сохранения, справедливых для данной модели (аналогично тому, как это делается для инвариантных

решений, — выделением набора существенно различных инвариантных решений). Оказывается, среди всех законов сохранения можно выделить базис (G — базис), т. е. некоторое число законов сохранения (зачастую один-два), из которых можно найти все остальные, используя преобразования, легко получаемые с помощью группы, допускаемой данной системой. Так, например, для системы уравнений газовой динамики базисом служит закон сохранения энергии и сохранения одной из компонент момента количества движения.

Итак, мы уже познакомились с некоторыми приложениями групп преобразований, допускаемых системой дифференциальных уравнений. Алгоритмы поиска группы преобразований не лишены трудоемкости. Так, при решении определяющей системы для уравнений трехмерной газовой динамики нужно проинтегрировать 680 дифференциальных уравнений. Однако большая часть этой работы представляет длинные, монотонные арифметические выкладки. Еще 20 лет назад Л. В. Овсянников предложил поручить выполнение такой работы ЭВМ. К настоящему моменту создано множество систем аналитических преобразований (САП) на ЭВМ, позволяющих существенно облегчить работу по вычислению группы, допускаемой дифференциальными уравнениями.

В качестве примера приведем расчет группы², допускаемой уравнением $V_t = -V_{xxxx} - V_{xx} + V_x^2$. Во второй статье сборника обсуждались уравнения типа реакция—диффузия, а также уравнение Курамото—Цузуки, отражающее поведение широкого класса таких систем. Оказывается, ряд моделей этого типа может эффективно описываться с помощью уравнения для функции V , которое часто называют уравнением Курамото—Сивашинского. Оно также возникает при анализе устойчивости нелинейных волн в активных средах, при изучении ансамбля связанных осцилляторов, в теории горения и в других задачах. Его анализ сейчас вызывает большой интерес ученых. По-видимому, это одно из наиболее простых уравнений, описывающих хаотические режимы в нелинейных средах. В данном случае от пользователя требуется лишь задать список независимых и зависимых переменных (рис. 7), координаты искомого инфинитезимального оператора («Простые функции» — 3-я строка программы),

² Расчет проводился в ИПМ АН СССР С. Р. Свирчевским по пакету программ «Софус», созданному М. Д. Поповым,

ПРОГРАММА

независимые переменные T, X ;
 зависимые переменные V ;
 простые функции AT, AX, AV ;
 системы исх, опр;
 исх $(DV \uparrow 4/DX \uparrow 4 =$
 $= (DV/DX) ** 2 - DV/DT - DV \uparrow 2/DX \uparrow 2)$;
 группа Ли (исх, опр, $AT * D/DT + AX * D/DX +$
 $+ AV * D/DV)$;
 пассив (опр, \emptyset, \emptyset);
 печать (опр);

РЕЗУЛЬТАТ

- 1) $DAT/DT = \emptyset$;
- 2) $DAT/DX = \emptyset$;
- 3) $DAT/DV = \emptyset$;
- 4) $DAX/DX = \emptyset$;
- 5) $DAX/DV = \emptyset$;
- 6) $DAX \uparrow 2/DT \uparrow 2 = \emptyset$;
- 7) $DAV/DT = \emptyset$;
- 8) $DAV/DX = -(1/2) * DAX/DT$;
- 9) $DAV/DV = \emptyset$;

Рис. 7

задать исходную систему и обратиться к программе «Группа Ли». В результате работы программы формулируется система определяющих уравнений, которая расщепляется, упрощается и приводится к так называемому пассивному виду (все условия совместности системы в ней содержатся). В результате получаем (время решения — около 3 мин), что исследуемое уравнение допускает следующие операторы:

$$X_1 = \partial/\partial t, \quad X_2 = \partial/\partial x, \quad X_3 = \partial/\partial V,$$

$$X_4 = t\partial/\partial x - (x/2)\partial/\partial V.$$

Знание группы симметрии — группы допустимых преобразований — дает существенную информацию об изучаемой модели. К сожалению, эта информация все еще редко используется «прикладниками». Теория и практика не всегда идут рука об руку, а зачастую в разные стороны. Не вдаваясь в причины этого досадного феномена, отметим, что для прикладных целей и не нужно владение техникой группового анализа, нужно лишь уметь использовать готовую информацию. «Бум» группового анализа 60-х годов привел к тому, что симметрия большинства используемых на практике систем уравнений уже изучена.

Список вычисленных групп преобразований для многих моделей математической физики можно найти, например, в [12].

Заметим, что использование симметрии системы уравнений не сводится к получению частных, допустим инвариантных решений. Одним из многих, еще не исследованных до конца путей использования свойств симметрии системы дифференциальных уравнений является идея *группового расслоения* множества решений. Суть его в следующем. Если известна группа G_r , допускаемая данной системой (S) , то уравнения (S) можно равносильно представить в виде двух систем, так называемой автоморфной системы уравнений (A) и разрешающей системы (R) . Такое представление называется *групповым расслоением* системы (S) относительно допускаемой группы.

При этом автоморфная система (A) обладает таким свойством: любое ее решение получается из какого-либо одного решения преобразованиями из G_r . Для разрешающей системы (R) все преобразования из G_r являются тождественными. Иначе говоря, система (S) расслаивается на две, где в (A) сосредоточена «вся симметрия» исходной системы (S) , а в систему (R) «слита» вся несимметричность, неинвариантность.

Свойства автоморфной системы (A) напоминают свойства линейной системы — и не случайно: преобразованием переменных она может быть сведена к линейной. Чем шире группа G_r , допускаемая системой (S) , тем эффективнее применение группового расслоения при изучении конкретных задач. Ясно, что этот подход можно применять и при других способах исследования, например при численных расчетах систем дифференциальных уравнений. Зачем «тащить» ненужную информацию о симметрии в расчетах, когда от нее можно избавиться? Это все равно, что печатать обои, не используя повторяемость рисунка.

Еще одно направление групповых методов — это групповой анализ краевых задач. Здесь основной вопрос формулируется так: каким условиям должно удовлетворять граничное многообразие для того, чтобы решение краевой задачи было инвариантным (или частично инвариантным) решением относительно группы G_r , допускаемой данной системой? Этот вопрос имеет большое значение для систем, содержащих сильные разрывы, например в случае ударных волн в газовой динамике.

Известно, что при практическом решении задач математической физики широко используются численные ме-

тоды, в частности конечно-разностные. Внесение алгебраической структуры группы в разностные схемы, подобно тому как это сделано для дифференциальных уравнений, было бы заманчиво, поскольку наделило бы разностные уравнения свойствами, аналогичными свойствам дифференциальной модели, например свойствами консервативности, которых в настоящее время добиваются иными путями.

Свойства консервативности разностных схем, т. е. выполнение разностных аналогов законов сохранения, является столь же фундаментальным понятием разностных уравнений, как и в дифференциальном случае. Впервые на это обратили внимание А. Н. Тихонов и А. А. Самарский. Введение понятия консервативности в теорию разностных схем привело к созданию нового конструктивного направления.

Развитие идеи консервативности привело к понятию полной консервативности разностных схем (А. А. Самарский, Ю. П. Попов, 1968 г.). Требование полной консервативности означает выполнение в разностных уравнениях не только основных независимых законов сохранения, но также и дополнительных соотношений, выражающих баланс отдельных видов энергии. Схемы, построенные с учетом принципа полной консервативности, особенно эффективны при использовании «грубых» сеток, а также в задачах с резко меняющимися во времени и пространстве параметрами.

Следует отметить и подход к созданию физически адекватных разностных схем, основанный на использовании идеи симметрии, т. е. групповых свойств. Н. Н. Яненко и Ю. И. Шокин предложили для этой цели использовать так называемое первое дифференциальное приближение разностных схем (ПДП) — дифференциальное уравнение, занимающее промежуточное положение между исходным дифференциальным уравнением и разностной схемой его решения. ПДП несет «остаточную» информацию о разностной схеме (например, весовые коэффициенты схемы входят в коэффициенты ПДП) и, являясь дифференциальным уравнением (или системой), вполне пригодно для техники группового анализа. Требование выполнения критерия инвариантности для ПДП позволяет отобрать такие схемы, ПДП которых допускает ту же группу, что и исходное дифференциальное уравнение.

Идеи прикладной математики наводят на мысль о приближенных групповых свойствах. Практика построения

приближенных моделей для исследования сложных систем дифференциальных уравнений показывает, что все удачные случаи упрощения системы характеризуются расширением группы допустимых преобразований — модельная система более симметрична (простейший пример — исследование многомерных задач с помощью одномерных моделей). Это означает, что более широкая группа модельной системы «приближенно допускается» исходной системой и переводит каждое его решение «почти в ее же решение». Эта заманчивая задача разработки «приближенного группового анализа», поставленная два десятилетия назад Л. В. Овсянниковым, еще ждет своего конструктивного оформления.

Очень перспективным направлением группового анализа является теория групп Ли—Беклунда, появившаяся несколько лет назад в работах советских и зарубежных математиков и получившая вполне законченное теоретическое оформление в трудах Н. Х. Ибрагимова. Группы Ли—Беклунда обобщают точечные преобразования, о которых речь шла всюду выше, на случай преобразования в бесконечномерных пространствах, содержащих наряду с зависимыми и независимыми переменными все производные до бесконечности. Группы Ли—Беклунда позволили разрешить многие проблемы классического группового анализа С. Ли; с их помощью удается найти и использовать «скрытые симметрии» дифференциальных уравнений, не доступные для классического подхода. В качестве примера можно привести хорошо известное уравнение Кортевега—де Вриза (КдВ). Оказалось, что солитоны — особый тип устойчивых решений этого уравнения — являются инвариантными решениями с точки зрения групп Ли—Беклунда, допускаемых уравнением КдВ. Более того, с помощью групп Ли—Беклунда удается очень просто выстроить всю бесконечную цепочку законов сохранения КдВ, которая раньше получалась с помощью метода обратной задачи рассеяния. В настоящее время изучены многие дифференциальные уравнения с точки зрения групп Ли—Беклунда. При этом выяснилось, что уравнение либо не допускает группу Ли—Беклунда вообще, либо допускает бесконечное их число (такowymi являются все линейные уравнения и относительно небольшой набор нелинейных уравнений, как, например, уравнение КдВ, уравнение Бонне и др.). Это не теорема, а, так сказать, наблюдаемый факт. Факт этот, однако, имеет далеко идущие следствия. В частности, давно проведенная математиками

«граница», делящая дифференциальные уравнения на линейные и нелинейные, быть может, не совсем точна. Эту границу надо, по-видимому, провести между уравнениями, допускающими бесконечную группу (все линейные уравнения и нелинейные уравнения типа КдВ), и уравнениями, допускающими лишь конечную группу (остальные нелинейные уравнения). Первый класс уравнений достаточно доступен для традиционного анализа; второй класс, который можно назвать «истинно нелинейными уравнениями», пока что доступен лишь для численных методов математики.

Вычисление групп Ли—Беклунда представляет собой существенно более трудоемкую задачу по сравнению с поиском классических групп Ли. Здесь использование систем аналитических преобразований на ЭВМ является просто необходимым элементом группового анализа.

В последнее время существенные достижения получены в поиске *нелокальных симметрий* дифференциальных уравнений, т. е. преобразований, содержащих интегральные компоненты. Примеры нелокальных симметрий, полученных во многих классических моделях математической физики, говорят о том, что в скором времени будут, по-видимому, созданы теория и регулярные алгоритмы поиска таких преобразований.

Обобщая сказанное, заметим, что групповой анализ в настоящее время переживает новый подъем. Это связано с более глубоким осмыслением математических моделей и широким проникновением идей математического моделирования в физику, технику, технологию и производство.

3. СПОНТАННОЕ НАРУШЕНИЕ СИММЕТРИИ И ЯВЛЕНИЯ САМООРГАНИЗАЦИИ

Тебе дано бесстрашной мерой
Измерить все, что видишь ты.
Твой взгляд — да будет тверд и ясен.
Сотри случайные черты —
И ты увидишь: мир прекрасен.

А. Блок. Возмездие

В этой главе мы рассмотрим примеры математических моделей, описывающих процессы спонтанного (самопроизвольного) нарушения высокой степени симметрии физического состояния системы³. Эти процессы приводят

³ Самую высокую степень симметрии в рассматриваемых нами случаях имеют те физические состояния, которые описываются пространственно-однородными распределениями таких макроскопических характеристик, как температура, скорость, концентрация.

к возникновению так называемых диссипативных структур — высокоупорядоченных образований, обладающих определенной формой, характерными пространственно-временными «размерами». Физическое состояние системы со структурами имеет более низкую степень симметрии по сравнению с пространственно-однородным состоянием. Для возникновения процессов самопроизвольного нарушения симметрии с понижением ее степени система с необходимостью должна быть открытой, т. е. активно взаимодействовать с окружающей средой.

В настоящее время явления образования структур находятся в поле пристального внимания исследователей различных специальностей. Биологов эти явления интересуют в связи с вопросом происхождения жизни, проблемами предбиологической эволюции, морфогенеза (тканеобразования); экологов — с точки зрения познания законов образования и устойчивого функционирования сложных биоценозов; физиков и химиков — с точки зрения создания принципиально новых приборов и установок, подобных лазеру; технологов — в связи с возможностью повышения производительности старых и созданием новых путей получения материалов с заданными свойствами; философов эти явления привлекают как примеры нетривиального проявления категории «часть и целое». Математическое моделирование явлений самоорганизации приводит к интереснейшим классам задач для нелинейных дифференциальных уравнений. По этой причине все большее число математиков обращается к этим явлениям. У нас нет возможности обсуждать все эти вопросы в настоящей статье. Заинтересовавшемуся читателю мы рекомендуем список литературы. Наша цель показать, что «форма» структур определяется устойчивыми нетривиальными инвариантными решениями простейших математических моделей явлений самоорганизации.

В настоящее время перечень систем, проявляющих при определенных условиях тенденцию к самоорганизации расширяется. Это вихри Тейлора, ячейки Бенара и Марангони в жидких средах, T -слои, E - и H -волокна в низкотемпературной плазме, эффект пятнистости в экологии, феномен полосатой окраски животных, образование доменной структуры в твердых телах, спиралевидная структура сколов кристаллов, периодические химические реакции и др.

В этом разделе мы остановимся на трех математических моделях процессов спонтанного нарушения симметрии макрохарактеристик открытых систем.

Явление периодического бора

Мы исчезаем... Нас поглощает
Волна другая, чтоб миг блеснуть,
И солнце зыбля освещает
Воли, приходящих умереть.

В. Брюсов. Гребень волны

Периодический бор, т. е. серия скачков глубины потока, наблюдается в открытых наклонных каналах с шероховатым дном и представляет собой периодическую волну с «жесткой» недеформируемой структурой свободной поверхности [18]. Эта структура движется вниз по потоку с постоянной скоростью и состоит из серии ступенек, соединенных участками гладкого течения (рис. 8). Картина явления периодического бора напоминает движущуюся вниз лестницу эскалатора метро. Волны такого типа наблюдаются в природе, например в каменном водоводе, соединяющем поселки Грюнибах и Мерлинген в Альпах. Авторы наблюдали периодический бор в наклонном канале, расположенном чуть выше искусственного катка в Медео близ Алма-Аты. По этому каналу отводятся воды, собирающиеся выше противоселевой плотины.

Течения типа периодического бора являются нежелательными в различного рода гидротехнических сооружениях и поэтому привлекли внимание исследователей-практиков. Это явление интересно и с общенаучной точки зрения как пример автоволнового явления (самопроизвольного образования волн).

В любом ли канале может возникнуть автоволна типа периодического бора? Нет, не в любом. Во многих случаях при постоянном расходе жидкости в канале устанавливается спокойное течение. Поток при этом имеет постоянную глубину и скорость. Вероятность же наблюдения периодического бора вырастает с увеличением угла наклона канала к горизонту. При больших наклонах

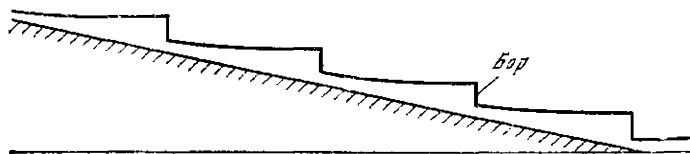


Рис. 8

ложа канала сила трения как бы уже не в силах всюду сдерживать действие ускоряющей составляющей — в результате пространственно-однородный поток теряет устойчивость и растущие возмущения трансформируются в периодическую бегущую волну.

Для определения условий возникновения этого явления воспользуемся свойствами внутренней симметрии его математической модели. Здесь будет рассмотрена самая простая модель, основанная на уравнениях теории «мелкой» воды. Первое уравнение модели отражает закон сохранения массы жидкости, протекающей по каналу:

$$h_t + (uh)_x = 0. \quad (23)$$

Второе уравнение модели является одной из форм закона изменения количества движения потока под действием ускоряющей и тормозящей сил:

$$u_t + uu_x + gh_x = f_1 - f_2(u, h), \quad (24)$$

где $h(x, t)$ — глубина потока; $u(x, t)$ — его скорость; g — ускорение свободного падения.

Ускоряющая сила f_1 постоянна, тормозящая сила, согласно закону Шези, пропорциональна квадрату скорости потока и обратно пропорциональна его глубине:

$$f_2(u, h) = cu^2h^{-1} \operatorname{sign}(u), \quad c > 0 - \text{const.}$$

Из условия равенства этих сил и условия постоянства расхода жидкости Q на входе в канал получаем уравнения, определяющие глубину и скорость пространственно-однородного потока:

$$u(x, t) \equiv u_0, \quad h(x, t) \equiv h_0.$$

Исследования показывают, что однородный поток становится неустойчивым при больших значениях скорости течения, определяемых условием

$$u_0 > 2\sqrt{gh_0}. \quad (25)$$

При выполнении условия (25) случайные возмущения однородного потока развиваются, усиливаются, однако приводят к упорядоченной структуре волны. Волна, как мы уже говорили, распространяется с постоянной скоростью (обозначим ее \mathcal{D}).

Обратим внимание читателя на то, что система уравнений (23), (24) автономна, другими словами, ее запись не содержит в явном виде время t . Запись исходной системы не содержит в явном виде переменную x . Следова-

тельно, она имеет инвариантное решение типа бегущей волны. Это частное решение уравнений (23), (24) вида:

$$u(x, t) = U(\xi), \quad h(x, t) = H(\xi), \quad \xi = x - \mathcal{D}t.$$

По существу, это стационарное решение исходных уравнений в системе координат, движущейся со скоростью \mathcal{D} . Инвариантное решение типа бегущей волны в данном случае определяется следующими уравнениями:

$$\frac{dH}{dt} = H^3 [f_1 - f_2(H, \mathcal{D})] [H^3 g - (u_0 - \mathcal{D})^2 h_0^2]^{-1},$$

$$U = [h_0 u_0 - \mathcal{D}(h_0 - H)]/H, \quad (26)$$

в которых u_0, h_0 — скорость и глубина однородного потока. Для уравнений (26) сформулируем задачу: найти условия существования нетривиальных периодических решений

$$H(\xi) = H(\xi + \lambda), \quad \lambda > 0, \quad H(\xi) \neq h_0, \quad \xi \in [0, \lambda] \quad (27)$$

и скорость распространения периодической волны \mathcal{D} .

Из теории дифференциальных уравнений известно, что обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка не имеет непрерывных периодических решений. Иначе говоря, задача (26), (27) не имеет нетривиальных решений в классе непрерывных функций. Отсутствие математического решения задачи при наличии решения в природе означает, что сформулированная математическая модель не верна. Где может быть ошибка или неточность? Либо в формулировке исходных уравнений, либо при формулировке задачи для этих уравнений. Вернемся к рис. 8, на котором изображена структура течения: периодически расположенные боры (скачки поверхности) соединены участками гладкого течения. На математическом языке скачок означает разрыв первого рода. Так, само явление подсказывает, что решение задачи (26), (27) надо искать в классе кусочно-непрерывных, а не в классе непрерывных функций. Причем из физических соображений ясно, что на разрывах должны выполняться условия сохранения потока массы жидкости и потока количества движения. С учетом этих замечаний можно переформулировать условия задачи и найти ее нетривиальные решения. Оказывается, что кусочно-непрерывное периодическое решение задачи (23) существует лишь при $D = u_0 + \sqrt{gh_0}$ и если выполнено условие (25). Итак, периодическое решение существует

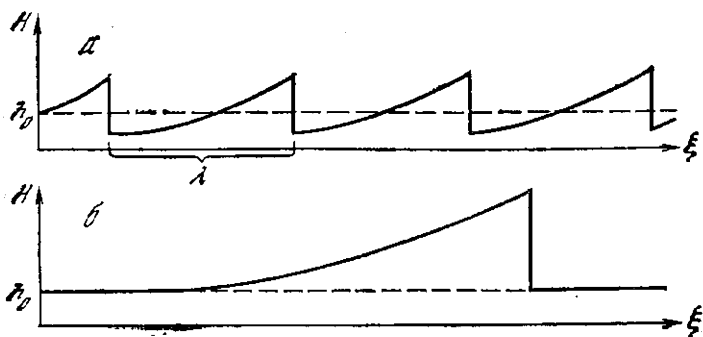


Рис. 9

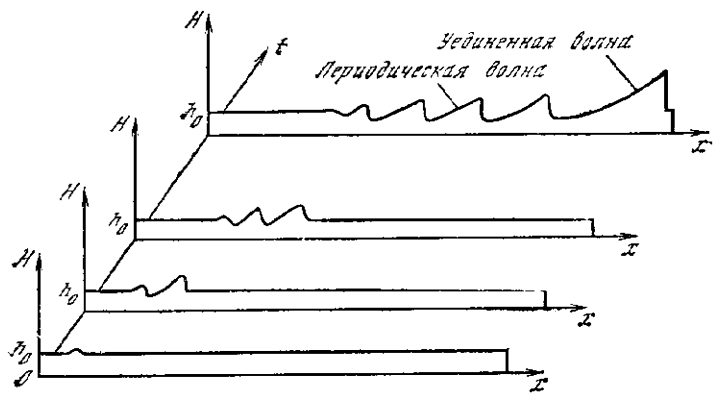


Рис. 10

при неустойчивости пространственно однородного потока (рис. 9, а). При выполнении условия (25), помимо периодического решения, существует так называемая уединенная волна — решение уравнения (26), удовлетворяющее граничным условиям (рис. 9, б):

$$\lim_{\xi \rightarrow -\infty} H(\xi) = h_0, \quad H(\xi_0) = h_0, \quad H(\xi) \neq 0.$$

Уединенная волна распространяется со скоростью, большей, чем у периодической волны. Мы уже знаем, что во многих случаях инвариантные решения, являясь в точном смысле частными решениями задач, с достаточно высокой степенью точности описывают асимптотику решений этих задач для широкого класса начальных данных. И в дан-

п м случае уединенные и периодические волны являются основными элементами решения задачи Коши для исходных уравнений (23), (24). В этом легко убедиться с помощью численных экспериментов. Численные расчеты задачи Коши показали, что развитие случайных возмущений неустойчивого пространственно-однородного потока приводит к возникновению как периодической, так и уединенной волны (рис. 10). На развитой стадии процесса волна состоит из двух частей: «головной» и «хвостовой». Головная часть представляет собой уединенную волну, хвостовая — периодическую.

Итак, при определенных условиях спонтанное нарушение симметрии может рождать устойчивую структуру в виде волны.

Эффект Марангони

В чем заключается эффект Марангони и где его можно наблюдать?

Представьте себе плоский слой жидкости, заключенный между свободной и твердой поверхностями (рис. 11). Пусть над жидкостью находится газ, содержащий поверхностно активное вещество (ПАВ), адсорбирующееся на поверхности жидкости и растворяющееся в ее объеме. Поверхностно активным называется вещество, меняющее коэффициент поверхностного натяжения жидкости, например камфара, моноэтаноламин и т. п.

Предположим, что на поверхности имеется область с повышенной концентрацией такого вещества. Если с ростом его концентрации коэффициент поверхностного натяжения уменьшается, то возникают силы, направленные вдоль поверхности жидкости и стремящиеся увеличить площадь области с повышенной концентрацией ПАВ. Вспомните школьный опыт с легкой лодочкой, к корме которой прикреплена рамка с кусочком камфары. Если лодочку опустить в сосуд с водой, то она начинает быстро двигаться по поверхности. Двигает лодочку сила, стремящаяся увеличить площадь пятна, покрытого камфорой. При этом свободная энергия системы стремится к минимуму. Если же вещество таково, что с ростом его концентрации коэффициент поверхностного натяжения увеличивается, то возникают силы, стремящиеся свести площадь поверхности, занятой им, к минимуму. Поверхностная сила вызывает движение приповерхностных слоев жидкости, которые из-за вязкости, в свою

очередь, увлекают более глубокие слои. Возникает конвективное движение жидкости.

Если подвод химической энергии ПАВ превышает расход на диссипацию кинетической энергии за счет вязкости, то в системе газ—жидкость возможно спонтанное возникновение незатухающего конвективного движения, вызванное флюктуациями в первоначально покоящейся жидкости. Это и есть эффект Марангони. Если же подвод химической энергии не велик (коэффициент поверхностного натяжения слабо зависит от концентрации ПАВ, либо процесс адсорбции ПАВ происходит вяло), то случайно возникшее в слое жидкости движение затухает со временем.

Эффект Марангони наблюдается также вблизи межфазной поверхности, разделяющей слои несмешивающихся жидкостей, при диффузии вещества, уменьшающего поверхностное натяжение, из фазы с меньшим коэффициентом диффузии и большей кинематической вязкостью.

Это явление было впервые описано в литературе более 130 лет назад. В настоящее время предполагается его использовать для интенсификации процесса массопереноса в системах газ—жидкость и жидкость—жидкость. Дело в том, что процесс, например переноса компоненты газовой фазы в жидкость, как правило, лимитируется величиной коэффициента диффузии в жидкости. Однако если в жидкости возникает конвективное движение, то поток вещества, попадающего в жидкость, возрастает за счет этого движения.

Развитие неустойчивости Марангони на границе двух фаз может приводить к образованию стационарных диссипативных структур — конвективных ячеек. На рис. 12 изображены траектории движения мелких взвешенных в жидкости частиц (а) и распределение концентрации вещества, растворенного в жидкости (б). Для того чтобы поставить это явление самоорганизации на службу интенсификации, необходимо изучить процессы в рассматриваемой системе. Исследование можно проводить с помощью натурального эксперимента. Наиболее полную информацию можно получить на пути сбалансированного сочетания средств натурального и вычислительного экспериментов. Что может дать в данном случае математическое моделирование? На этот вопрос мы ответим после описания модели процесса в системе газ—жидкость.

В основе математической модели процесса лежит

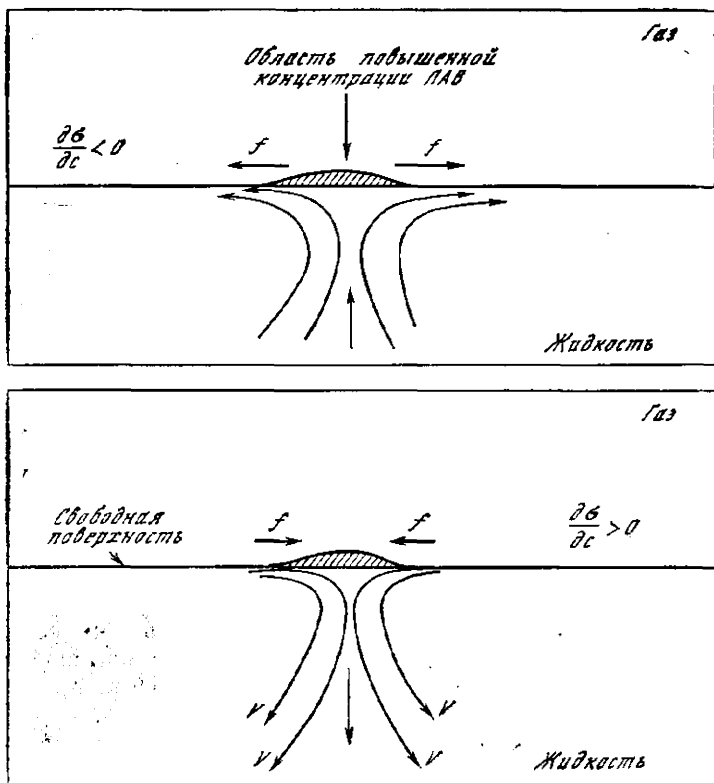


Рис. 11

система уравнений Навье—Стокса, диффузии, теплопроводности. Уравнения Навье—Стокса описывают движение несжимаемой вязкой жидкости в слое под действием поверхностных сил, вызванных градиентом концентрации ПАВ. Уравнения диффузии описывают поля концентраций ПАВ и других поверхностно-неактивных веществ, растворенных в жидкости. Уравнение теплопроводности описывает распределение тепла в слое. Источники или стоки тепла могут быть обусловлены энерговыделением при адсорбции и химических реакциях между компонентами раствора.

Система уравнений дополняется граничными условиями. Граничные условия содержат информацию о характере взаимодействия рассматриваемой системы с окружающей средой.

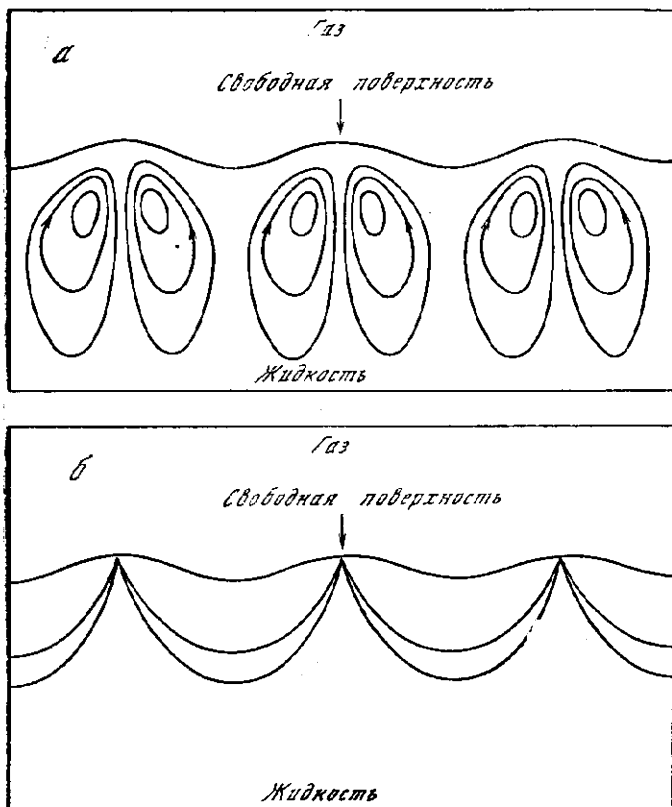


Рис. 12

Как определить условия, при которых возможно спонтанное зарождение диссипативных структур Марангони в слое покоящейся жидкости? Ответ на этот вопрос может быть получен в результате анализа устойчивости состояния покоя в слое. Для исследования устойчивости исходные нелинейные уравнения линеаризуются в окрестности стационара, соответствующего состоянию покоя. Затем определяется решение линейных уравнений и условия, при которых начальное возмущение состояния покоя возрастает. Оказывается, что некая безразмерная комбинация, называемая числом Марангони (Ma), определяет, возможна ли спонтанная конвекция. Существует критическое значение Ma_* . При сверхкритических

значениях этого параметра $Ma > Ma_*$ возникает конвективное движение. При $Ma < Ma_*$ начальные флуктуации в покоящейся жидкости затухают.

С помощью математической модели можно исследовать поля течений и поля концентраций растворенных веществ, вычислить потоки через межфазную поверхность при наличии конвекции Марангони и без нее, наконец, вычислить, во сколько раз увеличивается массоперенос из одной фазы в другую. Вся эта информация получается в результате численных расчетов на ЭВМ. На рис. 13 приведены линии уровня функций тока (левая серия рисунков) и линии уровня концентрации растворенного вещества (правая серия рисунков). Каждая пара рисунков (левый и правый) соответствует состоянию системы в определенный момент времени. Верхняя пара рисунков соответствует начальному состоянию, нижняя — конечному. В начальный момент времени в слой покоящейся жидкости (с линейным по глубине стационарным распределением концентрации ПАВ) внесли возмущение в виде капельки. Возмущение вызвало движение жидкости и деформацию поля концентраций. Слой стал постепенно заполняться рождающимися вихрями. Через достаточный промежуток времени установилось стационарное конвективное движение. Это движение существует благодаря подводу ПАВ из газовой фазы. Расчеты показали, что при сверхкритических значениях чисел Марангони за счет явлений самоорганизации массоперенос ПАВ может возрастать на 150—250%.

При слишком больших сверхкритических значениях числа Марангони стационарное конвективное движение может оказаться неустойчивым и в системе возникает турбулентное движение. Интересно, что в системе газ-жидкость маломодовое приближение приводит к хорошо известным уравнениям Лоренца, которые при определенных условиях имеют странный аттрактор. Существенно ли усиливается массоперенос в таких условиях? Исследование таких моделей показало, что, несмотря на возникновение странного аттрактора, ассоциирующегося с турбулентным движением, средние за большой промежуток времени значения истока вещества через межфазную поверхность практически не отличаются от потоков в неустойчивом стационарном конвективном движении. Это связано с тем, что хаотические колебания «в среднем» происходят в окрестности стационарного конвективного движения. Выводы, полученные на основе вычислитель-

Функция тока

Концентрация

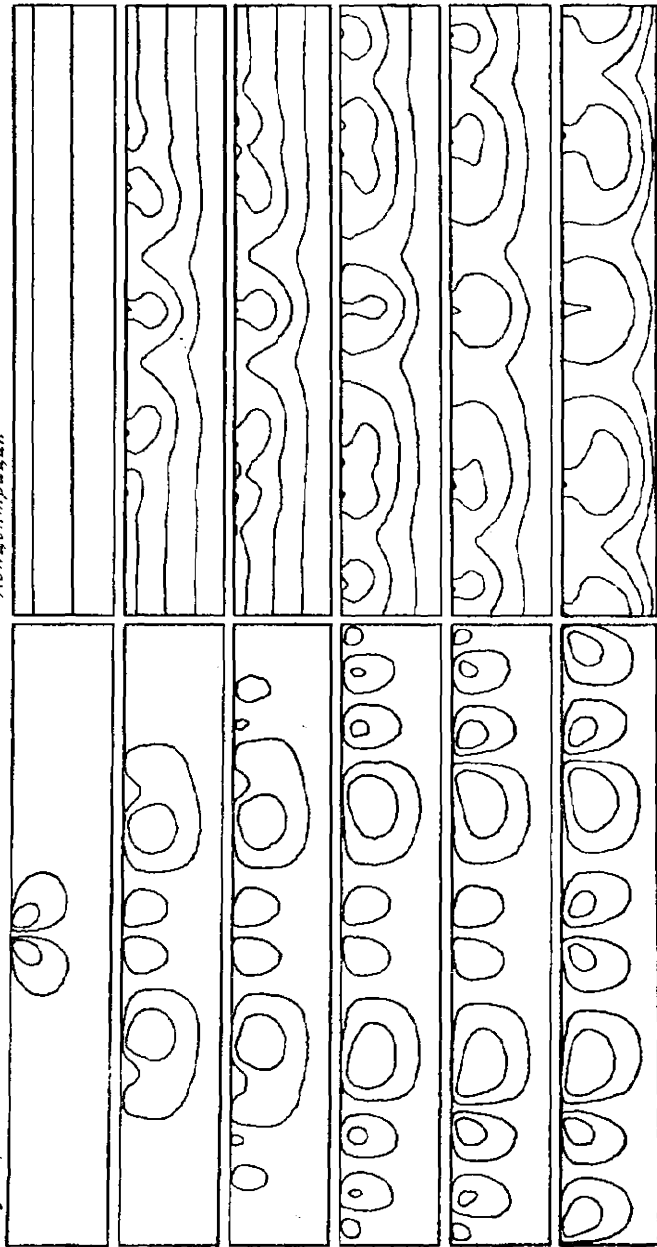


Рис. 13

ного эксперимента, используются для планирования натурального эксперимента.

Какое отношение имеет данный пример к рассматриваемой в данном разделе теме? Самое непосредственное. Спонтанное возникновение упорядоченного конвективного движения из состояния покоя сопровождается понижением степени симметрии в макроскопической системе.

**Почему туловище гепарда пятнистое,
а хвост полосатый?**

Ответ на вопрос будет дан ниже, а сейчас наша цель — показать, что математическая модель, состоящая из двух уравнений диффузии с нелинейными правыми частями, может предсказывать устойчивые картины окраски мехового покрова, подобные тем, какие наблюдаются у некоторых животных. По мнению ученых, существует некоторый единый и еще не изученный механизм, способный обеспечить разнообразие структур окраски у представителей семейства кошачьих, зебр, жирафа и других животных [8].

Окраска животных вызвана присутствием гранул пигмента меланина в их кожном покрове или шерсти. У млекопитающих есть в основном два вида меланина. Один из них дает черную или коричневую окраску, другой вызывает желтую или красновато-оранжевую. Меланин — высокомолекулярное соединение и синтезируется из соединений, имеющих меньший молекулярный вес. Его синтез является сложным многостадийным процессом и в настоящее время недостаточно изучен. Тем не менее основной этап процесса «разметки» картины мехового покрова некоторых животных, например представителей семейства кошачьих, можно рассмотреть с помощью простейшей математической модели следующего вида:

$$\begin{aligned} s_t &= \Delta s + \gamma g(s, a), \\ a_t &= \beta \Delta a + \gamma f(s, a), \quad \Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2, \end{aligned} \quad (28)$$

где s и a — концентрации меланина и его предшественника, участвующие в реакции синтеза; $g(s, a)$, $f(s, a)$ — скорости производства веществ S и A ; $\beta = D_a/D_s$ — отношение коэффициентов диффузии на поверхности. Можно считать, что $\beta > 1$. Множитель γ следует рассматривать как параметр размера области. Это означает, что для области с определенной геометрией и харак

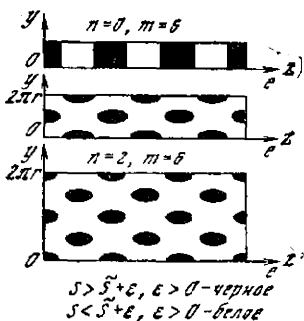


Рис. 14

терным размером l мы можем положить $\gamma = 1$. Рассматривая подобную ей геометрическую область с характерным размером L , мы полагаем $\gamma = \sqrt{L/l}$. Также существенно, что $g(a, s)$ и $f(a, s)$ таковы, что существует стационарное решение $s(x, y, t) \equiv \bar{s}$, $a(x, y, t) \equiv \bar{a}$, отвечающее пространственно-однородной окраске — фону, на котором природа рисует узор. Мы будем считать, что в тех областях поверхности, где $s > \bar{s}$, реализуется более темный цвет. Если тривиальное стационарное решение $s(x, y, t) \equiv \bar{s}$, $a(x, y, t) \equiv \bar{a}$ устойчиво, то узор не возникает. Возникновение узоров у пятнистых и полосатых с математической точки зрения связано с потерей устойчивости пространственно-однородного решения исходных уравнений. Эта неустойчивость может перерасти в стационарные диссипативные структуры конечной амплитуды, которые нас сейчас интересуют больше всего, так как именно они определяют рисунок мехового покрова.

Заменим истинную «выкройку» шкуры хищника (рис. 14) на модельную. Рассмотрим отдельно хвост и туловище. В качестве модели кожного покрова хвоста, а также туловища выберем боковую поверхность усеченного цилиндра радиуса r и длины l . Различие между хвостом и туловищем заключается в том, что отношение радиуса к длине у хвоста значительно меньше, чем у туловища. Запомните этот факт. Он имеет решающее значение.

Модель выкройки хвоста и туловища в переменных y и z имеет вид прямоугольника. В этой области и решается краевая задача для уравнений (28). По y зададим периодические граничные условия:

$$s(0, z, t) = s(2\pi r, z, t), \quad a(0, z, t) = a(2\pi r, z, t),$$

$$\frac{\partial s}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{\partial s}{\partial y} \Big|_{y=2\pi r}, \quad \frac{\partial a}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{\partial a}{\partial y} \Big|_{y=2\pi r},$$

а на «торцах» туловища или хвоста — условия отсутствия потоков веществ A и s :

$$\frac{\partial s}{\partial z} \Big|_{z=0} = \frac{\partial s}{\partial z} \Big|_{z=l} = \frac{\partial a}{\partial z} \Big|_{z=0} = \frac{\partial a}{\partial z} \Big|_{z=l} = 0.$$

С помощью такой модели приступим к расследованию причин пятнистости и полосатости. Прежде всего зададим такие вопросы. При каких условиях тривиальное стационарное решение теряет устойчивость и чем определяется «разметка» рисунка мехового покрова? Для ответа на эти вопросы можно линеаризовать уравнения (28) в окрестности пространственно-однородного стационара. Полученные линейные уравнения описывают эволюцию начальных возмущений $u = s - \bar{s}$ и $v = a - \bar{a}$. Решения уравнений имеют вид

$$u = \sum_{m, n} C_{m, n} e^{\lambda_{m, n} t} U_{m, n},$$

$$v = \sum_{m, n} C_{m, n} e^{\lambda_{m, n} t} V_{m, n},$$

где $\lambda_{m, n}$ — собственные числа; $U_{m, n}$, $V_{m, n}$ — собственные функции некоторой линейной задачи.

Собственная функция, например $U_{m, n}$, имеет вид

$$U_{m, n} = \cos \frac{\pi m}{l} z \left[\cos \left(\frac{y}{r} n \right) + \sin \left(\frac{y}{r} n \right) \right],$$

где m, n — произвольные натуральные числа (номера собственных функций); l — длина хвоста или туловища; r — его радиус.

Если $\text{Re } \lambda_{m, n} > 0$ по крайней мере для одной пары целых чисел m и n , то с ростом времени величина u экспоненциально растет, что означает неустойчивость стационарного решения. При этом в тех областях, где $u > 0$, поверхность темнеет (помните, мы договорились закрасить темным те области поверхности, где $s > \bar{s}$). Таким образом, при неустойчивости пространственно-однородного решения «проявляется» рисунок окраски живот-

ного. Если $\text{Re } \lambda_{m,n} < 0$ для всех m и n , то $u \rightarrow 0$, и даже существующий рисунок со временем «выцветает».

Можно показать, что $\text{Re } \lambda_{m,n} > 0$ при выполнении условий

$$\frac{\partial g}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial a} < 0, \quad \frac{\partial g}{\partial s} \frac{\partial f}{\partial a} - \frac{\partial g}{\partial a} \frac{\partial f}{\partial s} > 0,$$

$$\beta \frac{\partial g}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial a} > 0, \quad s = \tilde{s}, \quad a = \tilde{a}$$

для тех m и n , для которых справедливы неравенства

$$\gamma \Phi_- < \pi^2 m^2 + n^2 \delta^2 < \gamma \Phi_+, \quad (29)$$

где

$$\Phi_{\pm} = \frac{1}{2\beta} \left\{ \beta \frac{\partial g}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial a} \pm \left[\left(\beta \frac{\partial g}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial a} \right)^2 - 4\beta \left(\frac{\partial g}{\partial s} \frac{\partial f}{\partial a} - \frac{\partial g}{\partial a} \frac{\partial f}{\partial s} \right) \right]^{1/2} \right\},$$

$$\delta = l/r.$$

Некоторые возможные варианты раскраски представлены на рис. 14. Для нас будет существенным, что при $n = 0$ и $m > 0$ раскраска полосатая. При переходе n от нуля к единице темное кольцо скачком превращается в два полукольца. При переходе n от единицы к двойке полукольца превращаются в два пятна. При переходе от 2 к 3 два пятна превращаются в три пятна и т. д. Оказывается, что эти переходы можно связать в нашей модели с изменением δ .

Если γ настолько мало, что $\min(\pi^2, \delta^2) > \gamma \Phi_-$, условие (29) не выполняется ни при каких m и n , отличных от нуля, и, следовательно, неустойчивость не имеет места. Сделаем первый вывод: с ростом размеров увеличивается вероятность неустойчивости. Мы надеемся, что читатель помнит смысл параметра γ . Пусть γ — фиксированное число, достаточное для развития неустойчивости. Как влияет на раскраску величина δ ?

Пусть $\delta_{\text{кр}}$ настолько велико, что выполняются неравенства

$$\gamma \Phi_- < m_0^2 \pi^2 < \gamma \Phi_+$$

и не выполняются неравенства

$$\gamma \Phi_- < m_0^2 \pi^2 + \delta^2 < \gamma \Phi_+.$$

В этом случае хвост будет полосатый. Собственная функция с $\text{Re } \lambda > 0$ имеет номер $(m_0, 0)$. Понятно, что

при меньших значениях величины δ , что соответствует туловищу, можно найти такие значения $m \neq 0$ и $n \neq 0$, при которых $\text{Re } \lambda > 0$. Если значения m и n близки и достаточно велики, то туловище имеет пятнистую раскраску. Вот почему туловище гепарда пятнистое, а хвост полосатый,

Итак, узоры раскраски животных могут быть следствием спонтанного нарушения симметрии. Сама раскраска может являться стационарной диссипативной структурой. Как и когда формируется такая структура?

Исследования показывают, что рисунок раскраски возникает в период эмбрионального развития, причем не сразу. Так, у жирафа он появляется приблизительно на 100-е сутки беременности. С чем это связано? Это связано с величиной параметра γ . Пока эмбрион мал, мало и значение γ и ни при каких $m \neq 0$ и $n \neq 0$ не выполняются условия (29). По мере роста плода растет и γ , и условию (29) удовлетворяет все большее число наборов собственных функций с $m \neq 0$, $n \neq 0$.

Собственные функции линейного оператора дают лишь «разметку» поверхности, а окончательный рисунок зависит от нелинейностей в правых частях уравнений (28). Эти нелинейности производят отбор кандидатов на рисунок (кандидатами являются собственные функции линейной задачи) и превращают их в новые нетривиальные стационары.

Напомним, что стационарные решения являются частным случаем инвариантно-групповых решений. В данном примере именно они описывают структуру рисунка.

Итак, поиск и анализ наиболее симметричных (инвариантно-групповых) решений математической модели позволяют определить «финальные» формы процесса спонтанного нарушения симметрии.

Закачивая изложение неисчерпаемой темы, авторы дают себе полный отчет в том, что множество важных и интересных применений многоликой идеи симметрии-асимметрии в исследовании нелинейных явлений остается за рамками настоящей статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Арсеньев А. А., Самарский А. А. Что такое математическая физика. М.: Знание, 1983. 63 с.
2. Болтянский В. Г., Виленкин Н. Я. Симметрия в алгебре, М.: Наука, 1967. 283 с.
3. Вейль Г. Симметрия, М.: Наука, 1968, 191 с.

4. Вигнер Е. Этюды о симметрии. М.: Мир, 1971. 318 с.
5. Ибрагимов Н. Х. Группы преобразований в математической физике. М.: Наука, 1983. 280 с.
6. Кадомцев Б. Б., Ридник В. И. Волны вокруг нас. М.: Знание, 1981. 150 с.
7. Курдюмов С. П., Малинецкий Г. Г. Сипергетика — теория самоорганизации: Идеи, методы, перспективы. М.: Знание, 1983. 63 с.
8. Марри Дж. Нелинейные дифференциальные уравнения в биологии. М.: Мир, 1983. 397 с.
9. Моисеев Н. Н. Математика ставит эксперимент. М.: Наука, 1979. 512 с.
10. Николис Г., Пригожин И. Самоорганизация в неравновесных системах. М.: Мир, 1979. 512 с.
11. Овсянников Л. В. Лекции по теории групповых свойств дифференциальных уравнений. Новосибирск: НГУ, 1966. 131 с.
12. Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 416 с.
13. Рожановский Ю. М., Степанова Н. В., Чернавский Д. С. Математическое моделирование в биофизике. М.: Наука, 1975. 304 с.
14. Самарский А. А., Попов Ю. П. Вычислительный эксперимент. М.: Знание, 1983. 63 с.
15. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1977. 440 с.
16. Савицкий М. Г. Некоторые проблемы математического моделирования химических процессов и реакторов // Химическая пром-сть. 1987. № 1. С. 3—8.
17. Савицкий Г. Межфазные явления // Последние достижения жидкостной экстракции. М.: Химия, 1974. С. 204—254.
18. Стокер Дж. Волны на воде. М.: Из-во иностр. лит., 1956. 617 с.
19. Тарасов Л. В. Этот удивительно симметричный мир. М.: Просвещение, 1982. 176 с.
20. Тихонов А. Н., Костомаров Д. П. Рассказы о прикладной математике. М.: Наука, 1979. 206 с.
21. Флорри Р. Группы симметрии: Теория и химические приложения. М.: Мир, 1983. 395 с.
22. Форд К. Мир элементарных частиц. М.: Мир, 1965. 175 с.
23. Хакен Г. Синергетика. М.: Мир, 1980. 404 с.
24. Эйген М., Винклер Р. Игра жизни. М.: Наука, 1979. 93 с.
25. Эллиот Дж., Добер П. Симметрия в физике. М.: Мир, 1983. 364 с.

СОДЕРЖАНИЕ

	Предисловие	3
С. П. Курдюмов Г. Г. Малинецкий А. Б. Потанов А. А. Самарский	Структуры в нелинейных средах	5
Т. С. Ахромеева С. П. Курдюмов Г. Г. Малинецкий	Парадоксы мира нестационарных структур	44
В. А. Дородницын Г. Г. Еленин	Симметрия нелинейных явлений	123

Научно-популярное издание

КОМПЬЮТЕРЫ И НЕЛИНЕЙНЫЕ ЯВЛЕНИЯ

ИНФОРМАТИКА
И СОВРЕМЕННОЕ
ЕСТЕСТВОЗНАНИЕ

Утверждено к печати
Редакцией серии
«Научно-популярная литература
АН СССР»

Редактор издательства А. А. Боровая. Художник А. М. Драговой
Художеств. редактор М. Д. Богачев. Технич. редактор В. В. Тарасова
Корректоры В. А. Бобров, Н. Б. Габасова

ИБ № 37627

Сдано в набор 18.04.88. Подписано к печати 13.07.88. Т-15901. Формат 84×108¹/₂. Бумага кн.-журнальная. Гарнитура обычная. Печать высокая. Усл. печ. л. 16,08. Усл. кр. отг. 10,29. Уч.-изд. л. 10,9. Тираж 43000 экз. Тип. зак. 1596. Цена 45 коп.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Наука»
117864, ГСП-7, Москва, В-485, Профсоюзная ул., 90

2-я типография издательства «Наука»
121099, Москва, Г-99, Шубинский пер., 6

ОБ АВТОРАХ И ПУБЛИКАЦИЯХ

Самарский Александр Андреевич, академик, заместитель академика-секретаря Отделения информатики, вычислительной техники и автоматизации АН СССР, председатель Научного совета по комплексной проблеме «Математическое моделирование»

Курдюмов Сергей Павлович, член-корреспондент АН СССР, профессор МФТИ, заведующий сектором ИПМ им. М. В. Келдыша АН СССР

Малинецкий Георгий Геннадьевич, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник ИПМ им. М. В. Келдыша АН СССР

Потапов Алексей Борисович, кандидат физико-математических наук, младший научный сотрудник ИПМ им. М. В. Келдыша АН СССР

Статья написана специально для сборника.

Ахромеева Татьяна Сергеевна, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник ИПМ им. М. В. Келдыша АН СССР

Вариант брошюры, впервые изданной в издательстве «Знание».

Дородницын Владимир Анатольевич, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник ИПМ им. М. В. Келдыша АН СССР

Еленин Георгий Георгиевич, кандидат физико-математических наук, заведующий лабораторией математического моделирования в физике факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ

Вариант брошюры, впервые изданной в издательство «Знание».